

Capítulo 1

PORCENTAGEM

1.1 – PORCENTAGEM

A porcentagem nada mais é do que uma notação (%) usada para representar uma parte de cem partes.

Isto é, **20%** – lê-se “20 por cento”, que representa a fração

$$\frac{20}{100}$$

30% – lê-se “30 por cento”, que representa a fração $\frac{30}{100}$

Exemplos:

Calcule:

- a. 10% de 200
- b. 15% de 300
- c. 25% de 400

Solução:

- a. A palavra, "de" deve ser entendida como produto.

$$10\% \text{ de } 200 = \frac{10}{100} \cdot 200 = 20$$

b. $15\% \text{ de } 300 = \frac{15}{100} \cdot 300 = \frac{4.500}{100} = 45$

c. $25\% \text{ de } 400 = \frac{25}{100} \cdot 400 = \frac{10.000}{100} = 100$

Agora vamos ver como são simples os problemas que envolvem porcentagem.

Estes problemas geralmente são encontrados no nosso cotidiano.

Exemplos:

- 01. A média de reprovação em concurso é de 82%. Quantas pessoas serão aprovadas em um concurso público com 6.500 inscritos?**

Solução:

Se a média de reprovação é de 82%, vamos concluir que a média de aprovação é de 18%.

Logo, basta calcular:

$$18\% \text{ de } 6.500 = \frac{18}{100} \cdot 6.500 = 1.170 \text{ aprovados}$$

- 02. Se eu comprar um objeto por R\$ 20.000,00 e vendê-lo por R\$ 25.000,00, qual será a minha porcentagem de lucro?**

Solução:

$$\text{Lucro: } R\$ 25.000,00 - R\$ 20.000,00$$

$$\text{Lucro: } R\$ 5.000,00$$

Logo, para achar a porcentagem basta dividir o lucro pela base, isto é, dividir R\$ 5.000,00 por R\$ 20.000,00:

$$\frac{5.000}{20.000} = 0,25 = \frac{25}{100} = 25\%$$

- 03. Sabendo que um artigo de R\$ 50.000,00 foi vendido com um abatimento de R\$ 1.600,00, encontrar a taxa usada na operação.**

Solução:

Basta dividir o abatimento pelo preço do produto, isto é :

$$\frac{1.600}{50.000} = 0,032 = \frac{3,2}{100} = 3,2\%$$

- 04. Um produto foi vendido, com um lucro bruto de 20%. Sobre o preço total da nota, 10% correspondem a despesas. O lucro líquido do comerciante é de:**

Solução:

Vamos supor, sem perda de generalidade, que o preço inicial do produto é 100.

Preço inicial - 100

Preço de venda com lucro de 20% - 120

Despesa (10% de 120) - 12

Preço com lucro líquido = 120 - 12 = 108

Logo, lucro líquido = 108 - 100 = 8

$$\text{Logo, \% do lucro líquido} = \frac{8}{100} = 8\%$$

- 05. Um cliente obteve do comerciante desconto de 20% no preço da mercadoria. Sabendo-se que o preço de venda, sem desconto, é superior em 20% ao custo, pode-se afirmar que houve por parte do comerciante um . . . :**

Solução:

Preço de custo = 100 (un.)

Preço de venda s/desc = 120 (un.)

Preço de venda c/desc. = 120 x 80% = 96 (un.)

Comparando o **preço de custo** com o **preço de venda c/ desconto**, temos:

$$\frac{96 - 100}{100} = -4\%$$

Houve um prejuízo de 4%

06. Maria vendeu um relógio por R\$18.167,50 com prejuízo de 15,5% sobre o preço de compra. Para que tivessem um lucro de 25% sobre o custo, ela deveria ter vendido por:

Solução:

Preço vendido: R\$ 18.167,50

Preço de compra: x

$$84,5\% \cdot x = 18.167,50$$

$$x = \frac{18.167,50}{0,845}$$

$$x = 21.500$$

Para ter um lucro de 25%,

Teremos:

$$21.500 \cdot 1,25 = R\$ 26.875,00$$

07. Um lojista sabe que, para não ter prejuízo, o preço de venda de seus produtos deve ser no mínimo 44% superior ao preço de custo. Porém, ele prepara a tabela de preços de venda acrescentando 80% ao preço de custo, porque sabe que o cliente gosta de obter desconto no momento da compra. Qual é o maior desconto que ele pode conceder ao cliente, sobre o preço da tabela, de modo a não ter prejuízo?

- a. 10%
- b. 15%
- c. 20%
- d. 25%
- e. 36%

Solução:

Seja

x = preço de custo

preço de venda sem prejuízo = $x \cdot 1,44$

preço de venda com 80% = $1,80 \cdot x$

Logo, $\frac{x \cdot 1,44}{x \cdot 1,80} = 0,8 = 80\%$

Portanto, preço de venda sem prejuízo = 80% do preço de venda com 80% de acréscimo.

Daí, o desconto máximo será de 20%.

08. João vendeu um fogão com prejuízo de 10% sobre o preço de venda. Admitindo-se que ele tenha comprado o produto por R\$ 264.000,00 o preço de venda foi de:

Solução:

Seja:

x = preço de venda

Como teve prejuízo de 10% sobre o preço de venda, temos:

Preço de compra = preço de venda + 10% preço de venda

$$264.000 = x + 10\% \cdot x$$

$$264.000 = x + 0,1 \cdot x$$

$$264.000 = 1,10 \cdot x$$

$$1,10 \cdot x = 264.000 \therefore x = \frac{264.000}{1,10} = 240.000$$

O preço de venda foi de R\$ 240.000,00

09. Um terreno foi vendido por R\$ 16.500,00, com um lucro de 10%; em seguida, foi revendido por R\$ 20.700,00. O lucro total das duas transações representa, sobre o custo inicial do terreno, um percentual de:

Solução:

Se um terreno foi vendido por R\$ 16.500,00, com 10% de lucro, então o preço inicial foi de:

$$\frac{16.500}{1,10} = 15.000$$

Logo, o lucro total foi:

$$\frac{20.700 - 15.000}{15.000} \Rightarrow \frac{5.700}{15.000} = 0,38 = 38\%$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. A fração $\frac{0,0104}{0,65}$ é equivalente a :

- a. $\frac{1}{250}$
- b. $\frac{2}{125}$
- c. $\frac{1}{50}$
- d. $\frac{3}{125}$
- e. $\frac{7}{250}$

Resposta: **B**

02. Efetuando-se $\frac{12 \cdot 1,70 + 8 \cdot 1,80 + 10 \cdot 1,86}{30}$,

obtém-se:

- a. 1,72
- b. 1,74
- c. 1,75
- d. 1,78
- e. 1,79

Resposta: **D**

03. Pelo pagamento atrasado da prestação de um carnê, no valor de R\$ 1.200,00, recebeu-se uma multa de 7,5 % do seu valor. O total pago foi:

- a. R\$ 1.250,00
- b. R\$ 1.275,00
- c. R\$ 1.290,00
- d. R\$ 1.680,00
- e. R\$ 2.100,00

Resposta: **C**

04. Se uma pessoa já liquidou os $\frac{7}{16}$ do valor de uma dívida, a porcentagem dessa dívida que ainda deve pagar é :

- a. 56,25%
- b. 56,5%
- c. 58,25%
- d. 58,5%
- e. 62,25%

Resposta: **A**

05. Um lojista comprou 180 canetas de um mesmo tipo e vendeu 120 delas pelo mesmo preço total pago pelas 180. Se vender cada uma das 60 canetas restantes ao preço unitário das outras 120, a porcentagem de lucro desse lojista, pela venda de todas as canetas, será de:

- a. 40%
- b. 50%
- c. 52%
- d. 55%
- e. 60%

Resposta: **B**

06. Um título, no valor de R\$ 80.000,00, foi pago com 3 meses de antecedência, sofrendo um desconto comercial simples de R\$ 1.500,00. A taxa anual do desconto foi:

- a. 7,75%
- b. 7,5%
- c. 7,25%
- d. 6,5%
- e. 6,25%

Resposta: **B**

07. (BANESPA) - Um pequeno silo de milho perdeu 15% da carga pela ação de roedores. Vendeu-se $\frac{1}{3}$ da carga restante e ainda ficou com 42,5 toneladas. Portanto, a carga inicial em toneladas, antes da ação dos roedores, era:

- a. 61
- b. 75
- c. 87,5
- d. 90
- e. 105

Resposta: **B**

08. (TTN) - Num clube $\frac{2}{3}$ dos associados são mulheres. Se $\frac{3}{5}$ das mulheres são casadas e 80% das casadas têm filhos, o número de associados do clube, sabendo-se que as mães casadas são em número de 360, é de:

- a. 4.500
- b. 1.752
- c. 750
- d. 2.250
- e. 1.125

Resposta: **E**

09. Sabendo que um artigo de R\$ 50.000,00 foi vendido com abatimento de R\$ 1.600,00, encontrar a taxa utilizada na operação.

- a. 3,2%
- b. 3,5%
- c. 3,8%
- d. 4,2%
- e. 2,3%

Resposta: **A**

10. Calcular a taxa que foi aplicada a um capital de R\$ 4.000,00, durante 3 anos, sabendo-se que se um capital de R\$ 10.000,00 fosse aplicado durante o mesmo tempo, a juros simples de 5% a.a., renderia mais R\$ 600,00 que o primeiro. A taxa é de:

- a. 8,0% a.a
- b. 7,5% a.a
- c. 7,1% a.a
- d. 6,9% a.a
- e. 6,2% a.a

Resposta: B

11. Dois capitais estão entre si como 2 está para 3. Para que, em período de tempo igual, seja obtido o mesmo rendimento, a taxa de aplicação do menor capital deve superar a do maior em:

- a. 20%
- b. 60%
- c. 40%
- d. 50%
- e. 70%

Resposta: D

12. Um negociante comprou alguns bombons por R\$ 720,00 e vendeu-os a R\$ 65,00 cada um, ganhando, na venda de todos os bombons, o preço de custo de um deles. O preço de custo de cada bombom foi de:

- a. R\$ 12,00
- b. R\$ 75,00
- c. R\$ 60,00
- d. R\$ 40,00
- e. R\$ 15,00

Resposta: C

Capítulo 2

JURO

2.1 – DEFINIÇÕES

2.1.1. JURO (J)

Podemos definir **juro** como sendo a remuneração do empréstimo de um recurso financeiro, isto é, podemos encarar o juro como sendo o aluguel pago(ou recebido) pelo uso de um recurso financeiro.

Por exemplo, suponhamos que pedimos um empréstimo de R\$ 1000,00 ao Banco da Praça, para pagamento de 10% de juro daqui a um mês. É evidente que o dinheiro não é nosso, porém ele está a nossa disposição e podemos fazer o que bem entendermos com ele durante um mês. No fim do mês devemos devolver a quantia de R\$ 1000,00 e pagar pela disponibilidade dessa quantia nesse período; este pagamento, da disponibilidade, é chamado de juro. (neste caso é R\$ 100,00).

2.1.2. CAPITAL (C)

Chamamos de **Capital** ou **Principal** ao recurso financeiro transacionado. No exemplo anterior o capital foi a quantia de R\$ 1.000,00.

2.1.3. TAXA DE JURO (i)

É o **valor do juro, em uma unidade de tempo**, e será expresso como porcentagem do capital, logo chamaremos de **taxa de juro durante essa unidade de tempo**.

Sendo assim, teremos:

- a. A taxa de juro de 10% a.d.(dez por cento ao dia) significa que o valor do juro é igual a 10% do capital, por dia.
- b. A taxa de juro de 20% a.a.(vinte por cento ao ano) significa que o valor do juro é igual a 20% do capital, por ano.

Sendo assim, teremos:

J = Juro

C = Capital

i = Taxa de Juro expressa como porcentagem do capital.

Daí, pela definição, temos:

$$i = \frac{J}{C}$$

Observe que podemos concluir que **juro em uma unidade de tempo** é o produto do capital pela taxa de juro, isto é:

$$J = C \cdot i$$

2.1.4. MONTANTE (M)

Chamaremos de **montante** o capital acrescido do juro, e denotaremos por M, isto é:

$$M = C + J$$

RESUMO

- A definição de juro é equivalente ao pagamento de um aluguel de dinheiro.
- Observamos a definição taxa de juro (no singular), em uma unidade de tempo, isto é, taxa de juro é definida para uma unidade de tempo.

Exemplo:

Qual o juro e o montante obtido em uma aplicação de R\$ 1.000,00, durante um ano, a uma taxa de juro de 25% a.a.?

Solução:

Como a taxa de juro está expressa no período anual temos:

$$C = R\$ 1.000,00$$

$$i = 25\% \text{ a.a.}$$

Logo o juro em um ano será

$$\blacktriangleright J = C \cdot i$$

$$J = 1000 \cdot 25\%$$

$$J = 1000 \cdot \frac{25}{100}$$

$$J = 10 \cdot 25$$

$$J = R\$ 250,00$$

$$\blacktriangleright \text{Montante será}$$

$$M = C + J$$

$$M = 1.000 + 250$$

$$M = R\$ 1.250,00$$

2.2 – REGIME DE CAPITALIZAÇÃO

Chamamos de regime de capitalização à maneira como o montante evolui através de vários períodos, aos quais a taxa se refere. Sendo assim, teremos dois conceitos:

2.2.1. REGIME DE CAPITALIZAÇÃO SIMPLES

É o regime em que a taxa de juro incide somente sobre o capital inicial. Portanto, em todos os períodos de aplicações, os juros serão sempre iguais ao produto do capital pela taxa do período.

EXEMPLO:

Seja a aplicação de um capital de R\$ 1.000,00, à taxa de juro igual a 10% a.m., durante 3 meses. Qual os juros totais e qual o montante dessa aplicação, se o regime é o de capitalização simples?

Solução:

Seja J_1 o juro no fim do primeiro mês:

$$J_1 = 1.000 \cdot 10\%$$

$$J_1 = R\$ 100,00$$

Seja J_2 o juro no fim do segundo mês:

$$J_2 = 1.000 \cdot 10\%$$

$$J_2 = R\$ 100,00$$

Seja J_3 o juro no fim do terceiro mês:

$$J_3 = 1.000 \cdot 10\%$$

$$J_3 = R\$ 100,00$$

Assim teremos o Juro Total (J):

$$J = J_1 + J_2 + J_3$$

$$J = 100,00 + 100,00 + 100,00$$

$$J = R\$ 300,00$$

O montante (M) será:

$$M = C + J$$

$$M = 1.000,00 + 300,00$$

$$M = R\$ 1.300,00$$

2.2.2. REGIME DE CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA

É o regime em que a taxa de juro incide sobre o montante obtido no período anterior, para gerar juros no período atual.

Exemplo:

Seja a aplicação de um capital de R\$ 1.000,00 à taxa de juro igual a 10% a.m., durante 3 meses, no regime de capitalização composta.

Solução:

No fim do 1º mês teremos o Juro e o Montante:

$$J_1 = 1.000 \cdot 10\%$$

$$J_1 = R\$ 100,00$$

$$M_1 = R\$ 1.100,00$$

No fim do 2º mês teremos o Juro e o Montante:

$$J_2 = 1.100 \cdot 10\%$$

$$J_2 = R\$ 110,00$$

$$M_2 = R\$ 1.210,00$$

No fim do 3º mês teremos o Juro e o Montante:

$$J_3 = 1.210 \cdot 10\%$$

$$J_3 = R\$ 121,00$$

$$M_3 = R\$ 1.331,00$$

2.3 – FLUXO DE CAIXA

É a representação gráfica de um conjunto de entradas e saídas de dinheiro relativas a um determinado intervalo de tempo, na seguinte forma:

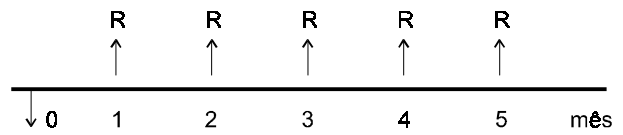
- a. Coloca-se na linha horizontal o período considerado
- b. Representam-se as entradas por setas de sentido para cima, e as saídas com setas de sentido para baixo.
- c. Evidentemente haverá sempre dois pontos de vista.

Exemplo:

Um carro, que custa R\$ 500.000,00 é vendido a prazo por 5 prestações mensais e iguais a R\$ 120.000,00, com a primeira prestação vencendo 1 mês após a venda.

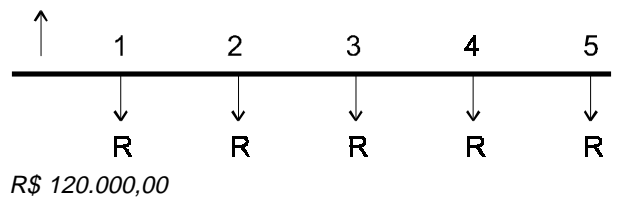
No ponto de vista do vendedor a diferença entre a soma das entradas e o valor do carro, corresponde aos juros relativos à aplicação de R\$ 500.000,00, também representada no gráfico.

$$C = R\$ 500.000,00$$



No ponto de vista do comprador a diferença entre a soma das saídas e o valor do carro, corresponde ao juro relativo ao empréstimo de R\$ 500.000,00, também representada no gráfico

$$C = R\$ 500.000,00$$



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. Qual o juro e o montante de uma aplicação de R\$ 600,00, durante um ano a taxa de juro de 30% a.a.?
Resposta: J = R\$ 180,00 e M = R\$ 780,00
02. Qual o juro e o montante de uma aplicação de R\$ 900,00 durante um semestre a taxa de juro de 30% a.s.?
Resposta: J = R\$ 270,00 e M = R\$ 1.170,00
03. Qual a taxa de juro de uma aplicação anual, sabendo-se que apliquei R\$ 200,00 e resgatei R\$ 260,00 ?
Resposta: i = 30% a.a.
04. Se ganhei um juro de R\$ 40,00 em uma aplicação mensal de R\$ 100,00, qual a taxa de juro aplicada ?
Resposta: i = 40% a.m.
05. Qual o capital que produz um juro de R\$ 80,00, durante um mês de aplicação a taxa de 5% a.m. ?
Resposta: C = R\$ 1600,00
06. Qual o juro e o montante de uma aplicação de R\$ 600,00, durante um mês a taxa de juro de 5% a.m.?
Resposta: J = R\$ 30,00 e M = R\$ 630,00

07. Qual o capital que produz um juro anual de R\$ 50,00, a taxa de 25% a.a.?

Resposta: $C = R\$ 200,00$

08. Qual a taxa de juro anual que duplica o capital após um ano?

Resposta: $i = 100\% \text{ a.a.}$

09. Qual a taxa de juro mensal que triplica o capital após um mês?

Resposta: $i = 200\% \text{ a.m.}$

10. Um produto é vendido por R\$ 120,00 a vista com uma entrada de 25% e mais um pagamento de R\$108,00 após um mês. Qual a taxa de juro mensal envolvida na operação?

Resposta: $i = 20\% \text{ a.m.}$

11. Um produto é vendido por R\$ 125,00 a vista com uma entrada de 20% e mais um pagamento de R\$110,00 após um ano. Qual a taxa de juro anual envolvida na operação?

Resposta: $i = 10\% \text{ a.a.}$

12. Quais os juros e o montante de uma aplicação de R\$ 100,00 durante três meses, a taxa de 10%a.m., no regime de capitalização simples ?

Resposta: $J = R\$ 30,00$ e $M = R\$ 130,00$

13. Quais os juros e o montante de uma aplicação de R\$ 100,00 durante três meses, a taxa de 10%a.m., no regime de capitalização composto ?

Resposta: $J = R\$ 33,10$ e $M = R\$ 133,10$

14. Em duas aplicações distintas de um capital durante um ano, a mesma taxa de juro anual, poderíamos dizer que no regime de capitalização composto o juro é maior do que o juro calculado no regime de capitalização simples ?

Resposta: É evidente que se a taxa aplicada refere-se ao ano então em um ano não temos capitalização e portanto o juro é igual ao produto do capital pela taxa ($J = C \cdot i$), logo a pergunta não tem sentido.

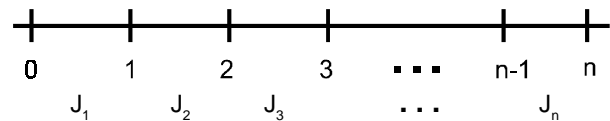
Capítulo III

JUROS SIMPLES

3.1 – CÁLCULO DE JUROS SIMPLES E MONTANTE

Seja C um Capital (ou Principal) aplicado à taxa i por período, durante um prazo de n períodos consecutivos, sob o regime de capitalização simples.

Conforme vimos no capítulo anterior, os juros serão iguais em todos os períodos, e, portanto, teremos:



Onde: $J_1 = J_2 = J_3 = \dots = J_n = C \cdot i$

daí, o Juro total nos n períodos será

$$J = J_1 + J_2 + J_3 + \dots + J_n$$

$$J = C \cdot i + C \cdot i + C \cdot i + \dots + C \cdot i$$

$$J = C \cdot i \cdot n$$

Para o **Montante** teremos:

$$M = C + J$$

$$M = C + C \cdot i \cdot n$$

$$M = C \cdot [1 + i \cdot n]$$

Exemplos:

01. Qual o valor dos juros obtidos por um empréstimo de R\$ 2.000,00, pelo prazo de 3 meses, sabendo-se que a taxa de juros simples cobrada é de 5% ao mês?

Solução:

$$C = R\$ 2.000,00$$

$$i = 5\% \text{ a.m.}$$

$$n = 3 \text{ meses}$$

$$J = C \cdot i \cdot n$$

$$J = 2.000 \cdot 5\% \cdot 3$$

$$J = 2.000 \cdot \frac{5}{100} \cdot 3$$

$$J = 20 \cdot 5 \cdot 3$$

$$J = R\$ 300,00$$

02. Um capital de R\$ 500.000,00 aplicado durante 5 meses, a juros simples, rende R\$ 10.000,00. Determinar a taxa de juros cobrada.

Solução:

$$C = R\$ 500.000,00$$

$$n = 5 \text{ meses}$$

$$J = R\$ 10.000,00$$

$$J = C \cdot i \cdot n$$

$$10.000 = 500.000 \cdot i \cdot 5$$

$$2.500.000 \cdot i = 10.000$$

$$i = \frac{10.000}{2.500.000} \therefore i = \frac{1}{250} = 0,004$$

$$i = 0,4\% \text{ a.m.}$$

03. Calcular o montante da aplicação de R\$ 100.000,00, pelo prazo de 6 meses, à taxa de juros simples de 5% a.m.

Solução:

$$C = R\$ 100.000,00$$

$$n = 6 \text{ meses}$$

$$i = 5\% \text{ a.m.}$$

$$M = C \cdot [1 + i \cdot n]$$

$$M = 100.000 \cdot [1 + 5\% \cdot 6]$$

$$M = 100.000 \cdot [1 + 30\%]$$

$$M = R\$ 130.000,00$$

3.2 – TAXAS PROPORCIONAIS

Duas taxas são ditas proporcionais se mantiverem entre si a mesma razão que os períodos de tempo a que se referem.

Assim, a taxa i_1 a n_1 é proporcional à taxa i_2 a n_2 se, e somente se:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

EXEMPLO:

Qual a taxa mensal proporcional à taxa de 36% a.a.?

Solução:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$\frac{i_1}{36\%} = \frac{1}{12}$$

$$i_1 = 3\% \text{ a.m.}$$

3.3 – TAXAS EQUIVALENTES JUROS SIMPLES

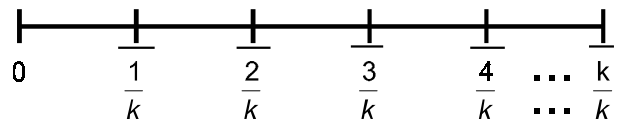
Duas taxas são ditas equivalentes, a juros simples, se aplicadas a um mesmo capital e durante um mesmo intervalo de tempo, produzem os mesmos juros ou montantes.

Sejam:

i : a taxa de juros simples aplicada no período de 0 a 1

i_k : a taxa de juros simples aplicada a cada intervalo fracionário

$\left(\frac{1}{k}\right)$ do período.



Se i e i_k são equivalentes, temos:

$$J = C \cdot i \quad \text{e} \quad J = C \cdot i_k \cdot k$$

então:

$$i_k = \frac{i}{k}$$

Exemplos:

01. Qual a taxa mensal simples equivalente a 36% a.a.?

Solução:

$$i_k = \frac{i}{k}$$

$$i_k = \frac{36\%}{12}$$

$$\therefore i_k = 3\% \text{ a.m.}$$

02. Qual a taxa semestral simples equivalente à taxa de 10% a.m.?

Solução:

$$i = ? \text{ a.s.}$$

$$i_k = 10\% \text{ a.m.}$$

$$K = 1 \text{ semestre} = 6 \text{ meses}$$

$$i = i_k \cdot k$$

$$i = 10\% \cdot 6$$

$$i = 60\% \text{ a.s.}$$

Obs.: Observe que no regime de capitalização simples, as taxas equivalentes produzem o mesmo conceito que as taxas proporcionais.

03. Calcular o juro simples de uma aplicação de R\$ 1.000,00, à taxa de juro de 36% a.a., durante o prazo de 6 meses.

Solução:

$$C = \text{R\$ } 1.000,00$$

$$i = 36\% \text{ a.a.}$$

$$n = 6 \text{ meses}$$

Obs.: Observe que o período a que se refere a taxa (ano) não é o mesmo período de aplicação (mês). Portanto, a taxa mensal equivalente a 36% a.a. será 3% a.m.

Logo:

$$J = 1.000 \cdot 3\% \cdot 6$$

$$J = 1.000 \cdot \frac{3}{100} \cdot 6$$

$$J = \text{R\$ } 180,00$$

3.4 – JURO EXATO E

JURO COMERCIAL (ORDINÁRIO)

Quando as aplicações ocorrem por alguns dias será conveniente utilizarmos a taxa equivalente diária. Nesse caso teremos dois enfoques:

- Ano Civil:** 365 dias ou 366 dias para ano bissexto e os meses com o número real de dias.
- Ano Comercial:** 360 dias e os meses com 30 dias.

Os juros que seguem o enfoque **a** são chamados de juros exatos.

Os juros que seguem o enfoque **b** são chamados de juros comerciais (ou ordinários).

Exemplo:

Qual o juro exato de uma aplicação de R\$ 365.000,00, à taxa simples de 10% a.a. durante 10 dias?

Solução:

$$C = \text{R\$ } 365.000,00$$

$$i = 10\% \text{ a.a.}$$

$$n = 10 \text{ dias}$$

$$\text{Taxa diária equivalente a } 10\% \text{ a.a.} = \frac{10\%}{365} \text{ a.d.}$$

$$J = 365.000 \cdot \frac{10\%}{365} \cdot 10$$

$$J = 1.000 \cdot 10\% \cdot 10$$

$$J = \text{R\$ } 1.000,00$$

3.5 – MÉTODO HAMBURGUÊS

Suponhamos que **k** capitais $C_1, C_2, C_3, \dots, C_k$ sejam aplicados a juros simples durante os períodos $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ a taxa i de juros simples.

Então o juro total obtido pelas aplicações acima será:

$$J = C_1 \cdot i \cdot n_1 + C_2 \cdot i \cdot n_2 + C_3 \cdot i \cdot n_3 + \dots + C_k \cdot i \cdot n_k$$

$$J = i \cdot [C_1 \cdot n_1 + C_2 \cdot n_2 + C_3 \cdot n_3 + \dots + C_k \cdot n_k]$$

$$j = i \cdot \sum_{j=1}^k C_j \cdot n_j$$

A fórmula deduzida acima é conhecida por método hamburguês.

Uma das aplicações comum é no cálculo dos juros incidentes sobre os cheques especiais.

Os valores $C_1 \cdot n_1, C_2 \cdot n_2, C_3 \cdot n_3, \dots, C_k \cdot n_k$ são conhecidos como número hamburguês.

Exemplos:

01. Calcular o valor dos juros referentes às aplicações de R\$ 400.000,00, R\$ 200.000,00 e R\$ 800.000,00, pelos prazos de 5 dias, 10 dias e 15 dias, respectivamente, sabendo-se que a taxa de juros simples considerada é de 180% a.a.

Solução:

Como o problema não fez referência ao critério do ano, vamos calcular o juro comercial:

$$C_1 = R\$ 400.000,00$$

$$C_2 = R\$ 200.000,00$$

$$C_3 = R\$ 800.000,00$$

$$n_1 = 5 \text{ dias}$$

$$n_2 = 10 \text{ dias}$$

$$n_3 = 15 \text{ dias}$$

$$i_1 = 180\% \text{ a.a.}$$

$$i_2 = 180\% \text{ a.a.}$$

$$i_3 = 180\% \text{ a.a.}$$

$$\text{Taxa equivalente diária: } \frac{180\%}{360} = 0,5\% \text{ a.d.}$$

$$J = 0,5\% \cdot [400.000 \cdot 5 + 200.000 \cdot 10 + 800.000 \cdot 15]$$

$$J = 0,5\% \cdot [2.000.000 + 2.000.000 + 12.000.000]$$

$$J = 0,5\% \cdot [16.000.000]$$

$$J = \frac{0,5}{100} \cdot 16.000.000$$

$$J = R\$ 80.000,00$$

02. Um banco, de uma praça, cobra 30% a.m. de juros sobre os saldos devedores dos cheques especiais. Um cliente fantasma teve o seguinte extrato mensal:

DATA	HISTÓRICO	VALOR	SALDO (D /C)
01/06	Saldo anterior	-	5.000.000 C
05/06	Cheque comp.	6.000.000 D	1.000.000 D
15/06	Cheque comp.	4.000.000 D	5.000.000 D
17/06	Depósito	10.000.000 C	5.000.000 C
20/06	Cheque comp.	7.000.000 D	2.000.000 D
25/06	Depósito	5.000.000 C	3.000.000 C
29/06	Cheque comp.	6.000.000 D	3.000.000 D

Calcular o valor dos juros incidentes sobre o saldo devedor.

Solução:

Neste caso, podemos usar o método Hamburgo usando a seguinte tabela:

DATA	HISTÓRICO	VALOR (D/C)	SALDO (D/C)	Nº de dias	Nº de dias x saldo devedor
01/06	Saldo anterior	-	5.000.000 C	-	-
05/06	Cheque comp.	6.000.000 D	1.000.000 D	10	10.000.000
15/06	Cheque comp.	4.000.000 D	5.000.000 D	2	10.000.000
17/06	Depósito	10.000.000 C	5.000.000 C	-	-
20/06	Cheque comp.	7.000.000 D	2.000.000 D	5	10.000.000
25/06	Depósito	5.000.000 C	3.000.000 C	-	-
29/06	Cheque comp.	6.000.000 D	3.000.000 D	2	6.000.000

Como a taxa considerada é 30% a.d., precisamos

$$\text{achar a taxa diária } \frac{30\%}{30} = 1\% \text{ a.d. , portanto, o}$$

juro sobre o saldo devedor, será:

$$J = 1\% \cdot [10.000.000 + 10.000.000 + 10.000.000 + 6.000.000]$$

$$J = 1\% \cdot 36.000.000$$

$$J = R\$ 360.000,00$$

3.6 – SALDO MÉDIO

Na maioria das instituições financeiras, é fornecido crédito aos clientes através da concessão de cheques especiais, empréstimos, cartões on-line, etc. Para definir o valor dessas linhas de crédito geralmente utilizamos o saldo médio da conta corrente.

Suponhamos que temos os saldos $C_1, C_2, C_3, \dots, C_k$, durante os prazos $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$.

O saldo médio é definido por:

$$S_m = \frac{C_1 \cdot n_1 + C_2 \cdot n_2 + C_3 \cdot n_3 + \dots + C_k \cdot n_k}{n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k}$$

ou

$$S_M = \frac{\sum_{j=1}^k C_j \cdot n_j}{\sum_{j=1}^k n_j}$$

Exemplo:

No exemplo anterior, se considerarmos apenas os saldos credores teremos:

Portanto o saldo médio seria:

$$S_m = \frac{5.000.000 \cdot 4 + 5.000.000 \cdot 3 + 3.000.000 \cdot 4}{4 + 3 + 4}$$

$$S_m = \frac{47.000.000}{11}$$

$$S_m = R\$ 4.272.727,30$$

3.7 – TAXA MÉDIA

Suponhamos que os capitais $C_1, C_2, C_3, \dots, C_k$ sejam aplicados a juros simples durante n períodos, a taxas i_1, i_2, \dots, i_k , na mesma unidade de período.

Queremos encontrar uma taxa única i que produza o mesmo juro das aplicações acima.

Então teremos:

O juro da aplicação acima é:

$$C_1 \cdot i_1 \cdot n + C_2 \cdot i_2 \cdot n + C_3 \cdot i_3 \cdot n + \dots + C_k \cdot i_k \cdot n \quad (1)$$

Por outro lado, o juro a uma taxa única i dos capitais $C_1, C_2, C_3, \dots, C_k$, será:

$$(C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_k) \cdot i \cdot n \quad (2)$$

Portanto (2) é igual a (1), logo temos:

$$i = \frac{C_1 \cdot i_1 + C_2 \cdot i_2 + C_3 \cdot i_3 + \dots + C_k \cdot i_k}{C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_k}$$

A taxa i é única e substitui as taxas anteriores, e portanto chamamos de taxa média a juros simples.

Obs.: Observe que se os capitais forem iguais, a taxa média será igual à média aritmética entre as taxas.

Exemplo:

Um investidor aplicou seu capital de R\$ 12.000.000,00 da seguinte forma:

R\$ 6.000.000,00 a 40% a.m.

R\$ 4.000.000,00 a 60% a.m.

R\$ 2.000.000,00 a 90% a.m.

Qual seria a taxa única, que poderia aplicar seu capital, para obter o mesmo rendimento?

Solução:

$$i = \frac{6.000.000 \cdot 40\% + 4.000.000 \cdot 60\% + 2.000.000 \cdot 90\%}{6.000.000 + 4.000.000 + 2.000.000}$$

$$i = \frac{2.400.000 + 2.400.000 + 1.800.000}{12.000.000}$$

$$i = \frac{6.600.000}{12.000.000} = 0,55$$

$$i = 55\%$$

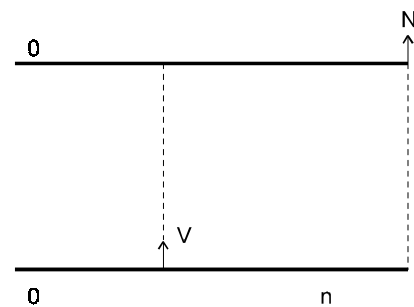
3.8 – VALOR ATUAL E VALOR NOMINAL

Chamamos de **Valor Nominal** de um título, ao seu valor na data de vencimento. Também é conhecido como valor face.

Chamamos de **Valor Atual** de um título, ao seu valor em qualquer data anterior ao seu vencimento.

No caso de capitalização simples, o valor atual de um título será o valor que aplicado, a juros simples, durante os n períodos de antecipação ao seu vencimento, produzirá como montante o valor nominal do título.

Chamando de N o valor nominal e V o valor atual com n períodos de antecipação teremos:



Dessa forma:

$$N = V \cdot [1 + i \cdot n]$$

$$V = \frac{N}{1 + i \cdot n}$$

Exemplo:

O valor nominal de um título é de R\$ 1.600,00 sendo que seu vencimento ocorrerá daqui a 3 meses.

Se a taxa de juros simples de mercado é de 20% a.m., determine o valor atual do título hoje.

Solução:

$$N = R\$ 1.600,00$$

$$i = 20\% \text{ a.m.}$$

$$n = 3 \text{ meses de antecipação}$$

$$V = \frac{N}{1 + i \cdot n} \quad \therefore \quad V = \frac{1.600}{1 + 20\% \cdot 3}$$

$$V = R\$ 1.000,00$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. Calcule a taxa de juro mensal, proporcional às seguintes taxas:

- a. 300% a.a.
- b. 90% a.s.

Solução:

a. $i = \frac{300\%}{12} = 25\% \text{ a.m.}$

b. $i = \frac{90}{6} = 15\% \text{ a.m.}$

- Respostas:** a. 25% a.m.
b. 15% a.m.

02. Seja um capital de R\$ 800.000,00, investido durante 4 meses e a taxa de juros simples de 120% a.a.. Calcule:

- a. O juro obtido
- b. O montante

Solução:

$C = R\$ 800.000,00$

$i = 120\% \text{ a.a. (equivalente a } i = 10\% \text{ a.m.)}$

$n = 4 \text{ meses}$

a. $J = C \cdot i \cdot n$

$J = 800.000 \cdot 10\% \cdot 4$

$J = R\$ 320.000,00$

b. $M = C + J$

$M = 800.000 + 320.000$

$M = R\$ 1.120.000,00$

- Respostas:** a. $J = R\$ 320.000,00$
b. $M = R\$ 1.120.000,00$

03. Em que prazo R\$ 12.000,00 rende R\$ 1.800,00, se a taxa de juros simples utilizada é 5% a.m.?

Solução:

$C = R\$ 12.000,00$

$J = R\$ 1.800,00$

$i = 5\% \text{ a.m.}$

$J = C \cdot i \cdot n$

$1.800 = 12.000 \cdot 5\% \cdot n$

$n = \frac{1.800}{12.000 \cdot 5\%} = 3 \text{ meses}$

Resposta: 3 meses

04. Calcule a taxa de juros simples de uma aplicação, sabendo que apliquei R\$ 5.200,00 e resgatei R\$ 6.448,00, depois de 4 meses.

Solução:

$C = R\$ 5.200,00$

$M = R\$ 6.448,00$

$n = 4 \text{ meses}$

$J = R\$ 1.248,00 \text{ (por que ?)} \rightarrow (J = M - C)$

$J = C \cdot i \cdot n$

$1.248 = 5.200 \cdot i \cdot 4 \rightarrow i = \frac{1.248}{5.200 \cdot 4}$

$i = 0,06 \therefore i = 6\% \text{ a.m.}$

Resposta: 6% a.m.

05. Em quantos meses um capital de R\$ 740.000,00, aplicado a 3,6% a.m., a juros simples, renderá juro necessário para a formação de um montante de R\$ 953.120,00?

Solução:

$C = R\$ 740.000,00$

$M = R\$ 953.120,00$

$i = 3,6\% \text{ a.m.}$

$J = R\$ 213.120,00 \text{ (por que?)}$

$J = C \cdot i \cdot n$

$213.120 = 740.000 \cdot 3,6\% \cdot n$

$n = \frac{213 \cdot 120}{740.000 \cdot 3,6\%} = 8 \text{ meses}$

Resposta: 8 meses

06. Um capital aplicado à taxa de juros simples de 8% a.m., triplica em que prazo?

Solução:

$C = \text{Capital aplicado}$

$M = 3C \text{ (por que ?)} \rightarrow \text{(triplica)}$

$i = 8\% \text{ a.m.}$

$J = 2C \text{ (por que ?)} \rightarrow (J = M - C)$

Como:

$J = C \cdot i \cdot n$

$2C = C \cdot 8\% \cdot n \rightarrow 8\% \cdot n = 2$

$n = \frac{200}{8} = 25 \text{ meses}$

Resposta: 25 meses

07. Um investidor recebeu R\$ 480.000,00 por uma aplicação de R\$ 300.000,00 à taxa de juros simples de 10% a.m.. De quantos meses foi essa aplicação?

Solução:

$$M = R\$ 480.000,00$$

$$C = R\$ 300.000,00$$

$$i = 10\% \text{ a.m.}$$

$$J = R\$ 180.000,00 \text{ (por que ?)} \rightarrow (J = M - C)$$

$$J = C \cdot i \cdot n$$

$$180.000 = 300.000 \cdot 10\% \cdot n$$

$$n = \frac{180.000}{300.000 \cdot 10\%}$$

$$n = 6 \text{ meses}$$

Resposta: 6 meses

08. Posso uma letra de câmbio no valor nominal de R\$ 1.300.000,00, que é resgatável daqui a 3 meses. Sabendo-se que a taxa de juros simples corrente de mercado é de 10% a.m., quanto devo pagar por esta letra hoje?

Solução:

$$N = R\$ 1.300.000,00$$

$$n = 3 \text{ meses (período de antecipação)}$$

$$i = 10\% \text{ a.m.}$$

$$V = \frac{N}{1 + i \cdot n}$$

$$V = \frac{1.300.000}{1 + 10\% \cdot 3}$$

$$V = R\$ 1.000.000,00$$

Resposta: R\$ 1.000.000,00

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (BACEN/Vunesp) – Na capitalização simples a taxa mensal que faz duplicar um capital, em 2 meses, vale

- 100%
- 50%
- 40%
- 30%
- 10%

Resposta: B

02. (BACEN/Vunesp) – Na capitalização simples, os juros correspondentes à aplicação de R\$ 2.000,00 por 2 meses, à taxa de 4% ao mês é ?

Resposta: R\$ 160,00

03. (CVM) – Os capitais de R\$ 12.000,00, R\$ 20.000,00 e R\$ 16.000,00 foram aplicados à mesma taxa de juros simples, durante 9, 5 e 8 meses, respectivamente. A soma desses capitais, isto é, R\$ 48.000,00, para produzir um juro simples igual à soma dos juros produzidos por aqueles capitais nos prazos respectivos, deveria ser aplicada durante quantos meses?

- 6 meses
- 7 meses
- 8 meses
- 9 meses
- 10 meses

Resposta: B

04. (INSS/97) – Diz-se que a taxa i é equivalente à taxa i' se, ao fim de determinado período, ambas produzirem o mesmo montante, quando aplicadas ao mesmo capital. Considerando o regime de juros simples e a informação acima, julgue os itens que se seguem.

Responder: Certo (C) ou Errado (E)

- () O Capital que, aplicado à taxa de juros de 12% a.a., transforma-se, ao final de 10 meses, em R\$ 308,00 é superior a R\$ 270,00.
- () Um capital aplicado a 200% a.a. e capitalizado semestralmente dobrará em 6 meses.
- () A juros de 10% a.a., uma dívida que, ao final de 2 anos, atingir R\$ 1.200,00 poderá ser imediatamente liquidada por R\$ 990,00.
- () Se uma taxa mensal i e uma taxa diária i' são equivalentes, então $i = 30 \cdot i'$.
- () Três taxas mensais e consecutivas de 2%, 3% e 5% equivalem a uma taxa trimestral de 10%.

Resposta: a. (C) b. (C) c. (E) d. (C) e. (C)

Capítulo 4

JUROS COMPOSTOS

4.1 – MONTANTE

Vimos no Capítulo I, que no regime de capitalização composta, o montante no fim de cada período é que gera juro para o período seguinte.

Seja o capital C , aplicado a uma taxa de juros compostos i , por período.

Assim temos:

No início do primeiro período C

- O montante após o primeiro período: $C(1 + i)$
- O montante após o segundo período: $C(1 + i)^2$
- O montante após o terceiro período: $C(1 + i)^3$

generalizando:

O montante após o n -ésimo período

$$C \cdot (1 + i)^n$$

Então o montante da aplicação de um capital C , durante n períodos será denotado por M e expresso por:

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

Obs.: O fator $(1 + i)^n$ é chamado de fator de capitalização, e encontra-se tabelado para diversos valores de i e n .

Exemplos:

01. Um capital de R\$ 500.000,00 é aplicado a juros compostos durante 3 anos, à taxa de 10% a.a..

- a. Qual o montante?
- b. Qual o total de juros auferidos?

Solução:

Temos:

$C = R\$ 500.000,00$

$i = 10\% \text{ a.a.}$

$n = 3 \text{ anos}$

Então:

- a. $M = C \cdot (1 + i)^n$
 $M = 500.000,00 (1 + 10\%)^3$
 $M = 500.000,00 \cdot (1,331000)$ (ver tabela I, pág.42)
 $M = R\$ 665.500,00$

- b. $J = M - C$
 $J = 665.500 - 500.000$
 $J = R\$ 165.500,00$

02. Durante quanto tempo um capital de R\$ 1.000.000,00 deve ser aplicado a juros compostos, à taxa de 15% a.a., para que produza um montante de R\$ 2.011.356,00?

Solução:

$C = R\$ 1.000.000,00$

$i = 15\% \text{ a.a.}$

$M = R\$ 2.011.357,00$

$M = C \cdot (1 + i)^n$

$2.011.357 = 1.000.000,00 \cdot (1 + 15\%)^n$

$(1 + 15\%)^n = 2,011357$

Consultando a tabela I (ver página 42) para $i = 15\%$ e resposta 2,011357 encontramos:

$n = 5 \text{ anos}$

4.2 – TAXAS EQUIVALENTES A

JUROS COMPOSTOS

Duas taxas são equivalentes a juros compostos, quando aplicadas num mesmo capital e durante um mesmo intervalo de tempo, produzem o mesmo montante.

Exemplo:

03. Qual a taxa anual equivalente à taxa de 5% a.m., sob o regime de capitalização composta?

Solução:

$C = \text{capital}$

Taxa mensal = 5% a.m.

$i = \text{taxa anual}$

Montante durante 1 ano será:

$C \cdot (1 + 5\%)^{12}$

Usando a taxa anual temos:

$C \cdot (1 + i)^1$

Portanto:

$(1 + i)^1 = (1 + 5\%)^{12}$

$1 + i = 1,795856$ (ver tabela I - pag. 42)

$i = 79,58\% \text{ a.a.}$

4.3 – CASO EM QUE O PRAZO DE APLICAÇÃO DO CAPITAL NÃO É UM NÚMERO INTEIRO DE PERÍODOS

Algumas vezes não temos o prazo de aplicação, n , como um número inteiro de períodos a que se refere a taxa de juro composto.

Nesses casos é comum utilizar as convenções abaixo:

4.3.1. CONVENÇÃO LINEAR

Esta convenção considera que os juros compostos evoluem durante a parte inteira de período, formando assim um montante; sobre este montante incidirá juros simples durante a parte fracionária do período.

Exemplo:

04. Qual o montante de um capital de R\$ 1.000.000,00 aplicado durante três anos e meio, à taxa de juros compostos de 10% a.a.

Solução:

Durante os três anos temos:

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

$$M = 1.000.000,00 \cdot (1 + 10\%)^3$$

$$M = \text{R\$ } 1.331.000,00$$

Durante o 0,5 ano temos:

$$M = C \cdot (1 + i \cdot n)$$

$$M = 1.331.000,00 \cdot (1 + 10\% \cdot 0,5)$$

$$M = 1.331.000,00 + 66.550,00$$

Montante final:

$$\text{R\$ } 1.397.550,00$$

4.3.2. CONVENÇÃO EXPONENCIAL

Esta convenção supõe que a fórmula $M = C (1 + i)^n$ vale para qualquer valor de n racional positivo.

Exemplo:

05. Considerando o exemplo anterior e utilizando $n = 3,5$ anos, temos:

Solução:

$$M = C (1 + i)^n$$

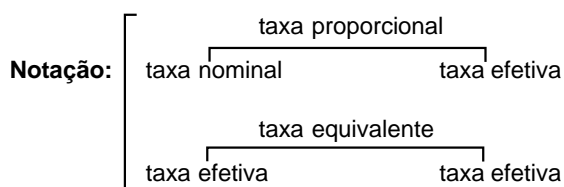
$$M = 1.000.000,00 \cdot (1 + 10\%)^{3,5}$$

$$M = \text{R\$ } 1.395.964,50$$

4.4 – TAXA EFETIVA E TAXA NOMINAL

Observamos que a fórmula do montante, tem como base a hipótese de que o período de capitalização coincide com o período da taxa. Porém na maioria dos problemas esta situação não ocorre. Neste caso, adotaremos duas convenções:

- Taxa nominal:** será a taxa na qual o período de capitalização não coincide com o período a que ela se refere.
- Taxa efetiva:** será a taxa que deverá ser aplicada à fórmula do montante, portanto deverá coincidir com o período de capitalização. Seu cálculo será efetuado como sendo a taxa proporcional à taxa nominal.



Exemplo:

06. Um capital de R\$ 1.000.000,00 foi aplicado, a juros compostos, durante um ano, à taxa de 60% a.a., com capitalização mensal. Qual o montante dessa aplicação?

Solução:

$$C = \text{R\$ } 1.000.000,00$$

$$n = 1 \text{ ano} = 12 \text{ meses}$$

$$i = 60\% \text{ a.a. (taxa nominal)}$$

$$i = 5\% \text{ a.m. (taxa efetiva)}$$

Capitalização mensal

$$M = 1.000.000,00 (1 + 5\%)^{12}$$

$$M = 1.000.000,00 \cdot 1,795856 \text{ (ver tabela I - pag. 42)}$$

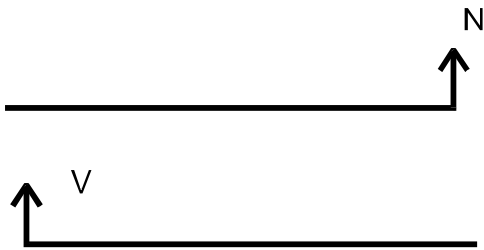
$$M = \text{R\$ } 1.795.856,00$$

4.5 – VALOR ATUAL E VALOR NOMINAL

Já vimos, a grosso modo, esses conceitos no Capítulo II. Valor Nominal (N) de um título é o seu valor na data de vencimento.

Valor Atual ou Presente (V) de um título, com n períodos de antecipação é o valor que aplicado (no caso de juros compostos) durante n períodos produz como montante o valor nominal do título.

Neste caso teríamos:



$$V = \frac{N}{(1 + i)^n}$$

onde: n é o número de períodos de antecipação.

Exemplo:

07. Seja um título cujo valor nominal é R\$ 1.610.510,00. Qual o seu valor atual (ou presente), se a taxa de juros compostos é de 10% a.m., e seu vencimento é daqui a 5 meses.

Solução:

$$N = \text{R\$ } 1.610.510,00$$

$$i = 10\% \text{ a.m.}$$

$$n = 5 \text{ meses}$$

$$V = \frac{N}{(1 + i)^n}$$

$$V = \frac{1.610.510}{(1 + 10\%)^5} \text{ (ver tabela I - pag. 42)}$$

$$V = \text{R\$ } 1.000.000,00$$

PROBLEMAS RESOLVIDOS

01. Calcular a taxa semestral equivalente a juros compostos às taxas:

a. 2% a.m.

b. 44% a.a.

Solução:

a. $(1 + i)^1 = (1 + 2\%)^6$

$$i = (1 + 2\%)^6 - 1$$

$$i = 1,126 - 1$$

$$i = 12,6\% \text{ a.s.}$$

b. $(1 + i)^2 = (1 + 44\%)^1$

$$i = \sqrt{1,44} - 1$$

$$i = 1,20 - 1$$

$$i = 20\% \text{ a.s.}$$

02. Qual o montante da aplicação de R\$ 1.000.000,00, a juros compostos, durante 6 meses, à taxa de 36% a.a., capitalizados mensalmente.

Solução:

$$C = \text{R\$ } 1.000.000,00$$

$$n = 6 \text{ meses}$$

Capitalização mensal

$$i = 36\% \text{ a.a. (Taxa nominal)}$$

$$i = 3\% \text{ a.m. (Taxa efetiva)}$$

$$M = 1.000.000 (1 + 3\%)^6$$

$$M = 1.000.000 \cdot 1,194052$$

$$M = \text{R\$ } 1.194.052,00$$

03. Determinar o prazo de uma aplicação de R\$ 550.000,00 a juros compostos, se desejo obter um montante de R\$ 1.106.246,50, à taxa de juros de 15% a.m..

Solução:

$$C = \text{R\$ } 550.000,00$$

$$M = \text{R\$ } 1.106.246,50$$

$$i = 15\% \text{ a.m.}$$

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

$$(1 + 15\%)^n = \frac{1.106.246,50}{550.000,00}$$

$$(1 + 15\%)^n = 2,01135727$$

$$n = 5 \text{ meses}$$

04. Qual a taxa efetiva para que o capital de R\$ 1.200.000,00, aplicado durante 2 anos, com capitalização mensal, atinja um montante de R\$ 7.609.416,88

Solução:

$$C = \text{R\$ } 1.200.000,00$$

$$M = \text{R\$ } 7.609.416,88$$

Capitalização mensal

$$n = 2 \text{ anos} = 24 \text{ meses}$$

$$M = C (1 + i)^{24}$$

$$7.609.416,88 = 1.200.000 \cdot (1 + i)^{24}$$

$$(1 + i)^{24} = 6,34118073$$

Consultando a tabela para $n = 24$, temos: $i = 8\% \text{ a.m.}$

05. Se o valor nominal de um título é R\$ 50.000,00, qual o prazo de antecipação, sabendo que o seu valor presente é R\$ 37.310,81 e a taxa efetiva de juros compostos é 5% a.m.

Solução:

$$N = R\$ 50.000,00$$

$$V = R\$ 37.310,81$$

$$i = 5\% \text{ a.m.}$$

$$V = \frac{N}{(1+i)^n}$$

$$(1+i)^n = \frac{50.000,00}{37.310,81}$$

$$(1+5\%)^n = 1,3400942$$

Consultando a tabela, temos:

$$n = 6 \text{ meses}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (BACEN/Vunesp) – A taxa de 4% ao mês, quando capitalizada com juros compostos, corresponde a uma taxa bimestral equivalente a

- 8% a.b.
- 8,16% a.b.
- 1,08% a.b.
- 1,0816% a.b.
- 16% a.b.

Resposta: B

02. (BACEN/Vunesp) – Um capital de R\$ 4.000,00, aplicado à taxa de 2% ao mês, durante 3 meses, na capitalização composta, gera um montante de

- R\$ 6.000,00
- R\$ 4.240,00
- R\$ 5.500,00
- R\$ 4.244,83
- R\$ 6.240,00

Resposta: D

03. (FTSC) – Quanto devo aplicar hoje para obter um rendimento de R\$ 101,25 após seis meses, a taxa de juros compostos de 10% ao ano, com capitalização trimestral?

$$\text{Dado: } (1.025)^2 = 1,050625$$

- R\$ 2.101,25
- R\$ 3.000,00
- R\$ 4.000,00
- R\$ 2.000,00
- R\$ 638,25

Resposta: D

04. (ISS/98) – Um aparelho de som é vendido à vista por R\$ 1.275,00 ou a prazo, sem entrada e em duas parcelas bimestrais iguais. Se a taxa bimestral de juros compostos for 4%, o valor de cada parcela será

- R\$ 676,00
- R\$ 684,00
- R\$ 688,00
- R\$ 692,00
- R\$ 696,00

Resposta: A

Capítulo 5
DESCONTOS SIMPLES
E COMPOSTOS

5.1 – DESCONTO

Chamamos de desconto ao abatimento obtido sobre o valor nominal de um título quando é resgatado antes da data do vencimento.

Assim o desconto será a diferença entre o valor nominal de um título e o valor do título na data do seu resgate.

Conforme o regime de capitalização, chamaremos o desconto de simples ou composto.

5.2 – DESCONTO RACIONAL SIMPLES (D_R)

Chamamos de desconto racional simples, ou também desconto real, ou ainda desconto por dentro, à diferença entre o valor nominal e o valor atual (ou presente) do título.

Seja:

N = Valor nominal do título

V = Valor atual com n períodos de antecipação

Então:

$$D_R = N - V \quad (1)$$

Se a taxa de juros simples é *i*, teremos:

$$D_R = N - \frac{N}{1 + i \cdot n}$$

daí: $D_R = \frac{N \cdot i \cdot n}{1 + i \cdot n} \quad (2)$

Por outro lado podemos achar outra fórmula:

$$D_R = V \cdot (1 + i \cdot n) - V$$

$$D_R = V \cdot i \cdot n \quad (3)$$

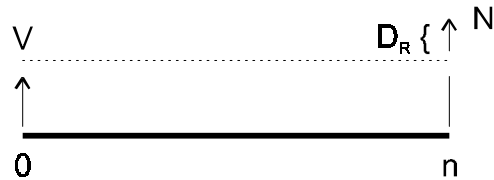
Portanto temos as fórmulas 1, 2, e 3 para o cálculo do desconto racional simples.

Observando a fórmula (3), chegamos à conclusão de que o desconto racional simples são juros simples devidos na aplicação do valor atual à taxa, e, durante os *n* períodos de antecipação.

Chamamos de valor descontado à diferença entre o valor nominal e o desconto.

Logo, no desconto racional temos que o valor descontado racional é o valor anual do título.

O gráfico abaixo dá uma idéia clara do desconto racional simples



Portanto, é fácil ver que:

$$D_R = N - V$$

$$V = N - D_R$$

onde: **D_R** : Desconto Racional Simples
V : Valor Descontado Racional Simples

EXEMPLO:

01. Um título de valor nominal de R\$ 3.000,00 é resgatado 5 meses antes de seu vencimento, à taxa de desconto racional simples de 3% a.m.

- a. Qual o valor descontado racional simples?
- b. Qual o desconto racional?

Solução:

$$N = \text{R\$ } 3.000,00$$

$$n = 5 \text{ meses (períodos de antecipação)}$$

$$i = 3\% \text{ a.m.}$$

a. Como o valor descontado racional é o valor anual simples temos:

$$V = \frac{N}{(1 + i \cdot n)}$$

$$V = \frac{3.000}{(1 + 3\% \cdot 5)}$$

$$V = \frac{3.000}{1,15}$$

$$V = \text{R\$ } 2.608,69$$

- b. Para achar o desconto racional simples, basta aplicar qualquer das fórmulas 1, 2 ou 3.

Vamos aplicar a fórmula 1, pois é imediata:

$$D_R = N - V$$

$$D_R = 3.000,00 - 2,608,69$$

$$D_R = 391,31$$

Respostas: a. R\$ 2.608,69

b. R\$ 391,31

5.3 – DESCONTO COMERCIAL SIMPLES (D_C)

Chamamos de desconto comercial simples, ou desconto por fora, ao juro simples aplicado sobre o valor nominal de um título, durante o número de períodos de antecipação.

Seja:

N = Valor Nominal de um título

d = Taxa de desconto comercial (ou por fora) simples

n = Número de períodos de antecipação da dívida

Então:

$$D_C = N \cdot d \cdot n \quad (4)$$

Neste caso, como sabemos que o valor descontado é a diferença entre o valor nominal e o desconto, temos que o valor descontado comercial simples será:

$$V_C = N - D_C \quad (5)$$

Usando 4 e 5 podemos chegar a outra fórmula:

$$V_C = N - D_C = N - N \cdot d \cdot n$$

portanto:

$$V_C = N [1 - d \cdot n] \quad (6)$$

O Valor descontado comercial simples as vezes é chamado de valor atual comercial e é expresso por V_C .

O gráfico abaixo ilustra bem essa situação.



Portanto, é fácil ver que:

$$D_C = N - V_C \quad (7)$$

onde:

D_C : Desconto comercial simples

V_C : valor descontado comercial (ou valor atual comercial)

Obs.:

1. A partir deste ponto usaremos a seguinte notação:

V_R : Valor atual (ou valor descontado racional)

V_C : Valor atual comercial (ou valor descontado comercial).

2. O valor descontado no Desconto Comercial, não é o valor Atual como é definido no Desconto Racional.

Exemplo:

02. Um título de valor nominal de R\$ 3.000,00 é resgatado 5 meses antes de seu vencimento, à taxa de desconto comercial simples de 3% a.m..

a. Qual o valor descontado comercial?

b. Qual o desconto comercial?

Solução:

$$N = R\$ 3.000,00$$

$$n = 5 \text{ meses (período de antecipação)}$$

$$d = 3\% \text{ a.m.}$$

a. $V_C = N (1 - dn)$

$$V_C = 3.000 (1 - 3\% \cdot 5)$$

$$V_C = 3.000 \cdot 0,85$$

$$V_C = 2.550,00$$

- b. Para achar o desconto comercial simples podemos aplicar qualquer das fórmulas 4 ou 7.

Vamos aplicar a 7 pois é imediata

$$D_C = N - V_C$$

$$D_C = 3000 - 2550$$

$$D_C = R\$ 450,00$$

Resposta: a. R\$ 2.550,00

b. R\$ 450,00

Obs: Como o valor nominal é sempre maior que o valor atual temos que:

$$D_C > D_R$$

$$V_C < V_R$$

Considerando a mesma taxa ($i = d$) e lógico o mesmo período.

5.4 – DESCONTO BANCÁRIO SIMPLES (D_B)

Geralmente as operações de desconto realizadas em instituições financeiras, seguem o critério do desconto comercial. Porém é comum a cobrança de uma taxa sobre o valor nominal a título de despesas administrativas.

Ressaltamos que é comum usar o termo desconto bancário para o desconto comercial visto no item anterior.

Seja:

N = Valor Nominal de um título

d = taxa de desconto comercial

b = taxa administrativa

n = número de períodos de antecipação

D_C = Desconto comercial simples

D_B = Desconto bancário

$$D_B = D_C + Nb$$

portanto:

$$D_B = N \cdot d \cdot n + N \cdot b$$

Colocando **Nn** em evidência, temos:

$$D_B = N \cdot d \cdot n + N \cdot b \quad (8)$$

Continuando, podemos chamar a taxa $d + b/n$ de **d** e obter a fórmula:

$$D_B = N \cdot g \cdot n \quad (9)$$

onde **g** será chamada de taxa de desconto bancário simples.

O valor descontado bancário simples será:

$$V_B = N - D_B \quad (10)$$

ou ainda:

$$V_B = N \cdot (1 - g \cdot n) \quad (11)$$

Exemplo:

03. Uma nota promissória cujo valor nominal é R\$ 3.000,00 foi resgatada 5 meses antes do seu vencimento, à taxa de desconto comercial simples de 3% a.m., com 10% de taxa administrativa. Qual o desconto bancário?

Solução:

$$N = R\$ 3.000,00$$

$$n = 5 \text{ meses (períodos de antecipação)}$$

$$d = 3\% \text{ a.m.}$$

$$b = 10\%$$

logo:

$$D_B = 3.000 \cdot 5.5\%$$

$$D_B = R\$ 750,00$$

Resposta: R\$ 750,00

5.5 – RELAÇÃO ENTRE TAXA DE DESCONTO RACIONAL SIMPLES (i) E TAXA DE DESCONTO COMERCIAL SIMPLES (d)

Observamos, que o desconto racional (ou por dentro) é o desconto que deveria ser aplicado, no ponto de vista matemático. Isto é evidente pois a sua taxa coincide com a taxa de juros simples.

Podemos formular uma questão:

Quando usamos o desconto comercial simples (taxa **d**) ou bancário simples (taxa **d**) qual é a taxa de juros simples real utilizada?

Resposta: A taxa de juros simples utilizada na realidade coincidirá com a taxa de desconto racional (**i**). Esta taxa será tal que produza o desconto racional igual ao desconto comercial, isto é:

$$D_C = N \cdot d \cdot n$$

e

$$D_R = \frac{N \cdot i \cdot n}{1 + i \cdot n}$$

Daí temos: $d = \frac{i}{1 + i \cdot n} \quad (12)$

ou ainda: $i = \frac{d}{1 - d \cdot n} \quad (13)$

No caso de desconto bancário, teremos:

$$\gamma = \frac{i}{1 + i \cdot n} \quad (14)$$

ou

$$i = \frac{\gamma}{1 - \gamma \cdot n} \quad (15)$$

Obs.: A taxa de juro simples **i** é chamada de taxa efetiva de juro simples.

Exemplo:

04. Qual a taxa efetiva de juro simples cobrada pela instituição financeira no exemplo 3.

Solução:

$$\gamma = \left(d + \frac{b}{n} \right)$$

onde:

$$d = 3\% \text{ a.m.}$$

$$b = 10\%$$

$$n = 5 \text{ meses}$$

$$g = 5\% \text{ a.m.}$$

logo:

$$i = \frac{\gamma}{1 - \gamma \cdot n}$$

$$i = \frac{5\%}{1 - 5\% \cdot 5}$$

$$i = \frac{5\%}{1 - 25\%}$$

$$i = 6.67\% \text{ a.m.}$$

Resposta: 6,67% a.m.

5.6 – DESCONTO RACIONAL COMPOSTO (POR DENTRO)

A definição de desconto composto é análoga à de desconto simples, a diferença existe apenas no regime de capitalização.

Da mesma maneira que expusemos o desconto racional simples, podemos expor o desconto racional composto.

Assim temos:

D_R : Desconto racional composto

N : Valor nominal de um título

V : Valor atual do título

i : Taxa de juros composto por período

Então:

$$D_R = N - V$$

Como no regime de capitalização composta o valor atual tem a fórmula:

$$V = \frac{N}{(1 + i)^n}$$

podemos substituir na fórmula acima, obtendo-se:

$$D_R = N \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n} \right] \quad (16)$$

que é a fórmula para o desconto racional composto.

A fórmula 16 também pode ser escrita como:

$$D_R = N \cdot i \cdot a_{\overline{n}|i}$$

$a_{\overline{n}|i}$: é a notação que representa o valor atual de uma anuidade unitária periódica e temporária, com N termos, cujos pagamentos são postergados, à taxa de juros compostos por período i . Este valor é tabelado, e se encontra no final deste material

Exemplo:

05. Um título de valor nominal igual a R\$ 10.000,00 é resgatado 2 meses antes de seu vencimento, segundo o critério de desconto racional composto. Sabendo-se que a taxa de juro composto é de 10% a.m., qual o valor do desconto?

Solução:

$$N = R\$10.000,00$$

$$n = 2 \text{ meses (períodos de antecipação)}$$

$$i = 10\% \text{ a.m.}$$

$$D_R = N \cdot i \cdot a_{\overline{n}|i}$$

$$D_R = 10.000 \cdot 10\% \cdot a_{\overline{2}|10\%}$$

Consultando a tabela, temos:

$$a_{\overline{2}|10\%} = 1,735537$$

$$D_R = 10.000 \cdot 10\% \cdot 1,735537$$

$$D_R = R\$ 1.735,54$$

Resposta: R\$ 1.735,54

OUTRA SOLUÇÃO:

Calculando o valor anual, temos:

$$V = \frac{N}{(1 + i)^n}$$

$$V = \frac{10.000}{(1 + 10\%)^2}$$

$$V = \frac{10.000}{1,21000}$$

onde:

$$V = \text{R\$ } 8.264,46$$

Logo, o valor descontado racional composto é:

$V = \text{R\$ } 8.264,46$, daí o valor do desconto é:

$$D_R = N - V = 10.000 - 8.264,46$$

Logo:

$$D_R = \text{R\$ } 1.735,54$$

5.7 – DESCONTO COMERCIAL COMPOSTO (POR FORA)

Trata-se de várias aplicações sucessivas do desconto comercial simples até se chegar à época da antecipação do pagamento do título.

Sendo assim, temos:

D_C : Desconto comercial composto

N : Valor nominal do título

V_C : Valor atual comercial (ou descontado)

d : Taxa de desconto comercial

Então o valor atual do desconto comercial composto de um título com n períodos de antecipação é expresso, por:

$$V_C = N \cdot (1 - d)^n \quad (17)$$

e o valor do desconto comercial composto será de:

$$D_C = N [1 - (1 - d)^n] \quad (18)$$

EXEMPLO:

06. Um título de valor nominal igual a R\$10.000,00 é resgatado 2 meses antes de seu vencimento segundo o critério de desconto comercial composto. Sabendo-se que a taxa de desconto composto é 10% a.m., qual o valor do desconto?

Solução:

$$N = \text{R\$}10.000,00$$

$n = 2$ meses (período de antecipação)

$d = 10\%$ a.m

$$V_C = N(1 - d)^n$$

$$V_C = 10.000,00 (1 - 10\%)^2$$

$$V_C = 10.000,00 (0,90)^2$$

$$V_C = \text{R\$ } 8.100,00$$

daí, o desconto comercial composto será:

$$D_C = N - V_C$$

$$D_C = 10.000 - 8.100$$

$$D_C = \text{R\$ } 1.900,00$$

Obs.: Deixamos a critério do leitor, a demonstração da relação entre taxa de desconto racional e desconto comercial, no caso de capitalização composta e ressaltamos que o resultado é o mesmo mostrado neste capítulo.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

01. Um título vai ser resgatado dois meses antes do seu vencimento. Sabendo que foi adotado o critério do desconto racional simples, à taxa de 15% a.m., qual o valor descontado e o desconto desse título de valor nominal igual a R\$ 100.000,00?

Solução:

$$N = \text{R\$}100.000,00$$

$n = 2$ meses (períodos de antecipação)

$i = 15\%$ a.m.

Valor descontado:

$$V = \frac{N}{1 + i \cdot n}$$

então:

$$V = \frac{100.000}{1 + 15\% \cdot 2}$$

daí;

Valor descontado:

$$V = \text{R\$ } 76.923,08$$

Desconto Racional Simples

$$D_R = N - V$$

$$D_R = 100.000 - 76.923,08$$

donde:

$$D_R = \text{R\$ } 23.076,92$$

Respostas: $V = \text{R\$ } 76.923,08$

$$D_R = \text{R\$ } 23.076,92$$

02. Um título de valor nominal de R\$ 500.000,00 vai ser resgatado três meses antes do vencimento, sob o regime de desconto racional simples. Sabendo-se que a taxa de desconto racional é de 96% a.a., qual o valor descontado e o valor do desconto?

Solução:

$$N = \text{R\$ } 500.000,00$$

$$n = 3 \text{ meses (períodos de antecipação)}$$

$$i = 96\% \text{ a.a.} = 8\% \text{ a.m.}$$

Valor descontado:

$$V = \frac{N}{1 + i \cdot n}$$

$$V = \frac{500.000}{1 + 8\% \cdot 3}$$

$$V = \text{R\$ } 403.225,81$$

Desconto Racional:

$$D_R = N - V$$

$$D_R = 500.000 - 403.225,81$$

$$D_R = \text{R\$ } 96.774,19$$

Respostas: $V = \text{R\$ } 403.225,81$

$$D_R = \text{R\$ } 96.774,19$$

03. Um título vai ser resgatado dois meses antes de seu vencimento. Sabendo-se que foi adotado o critério do desconto comercial simples, à taxa de 15% a.m., qual o valor descontado e o valor desse título de valor nominal igual a R\$ 100.000,00?

Solução:

$$N = \text{R\$ } 100.000,00$$

$$n = 2 \text{ meses (períodos de antecipação)}$$

$$d = 15\% \text{ a.m.}$$

Valor do desconto comercial simples:

$$D_C = N \cdot d \cdot n$$

$$D_C = 100.000 \cdot 15\% \cdot 2$$

$$D_C = \text{R\$ } 30.000,00$$

Valor descontado comercial:

$$V_C = N - D_C$$

$$V_C = 100.000 - 30.000$$

$$V_C = \text{R\$ } 70.000,00$$

Respostas: $D_C = \text{R\$ } 30.000,00$

$$V_C = \text{R\$ } 70.000,00$$

04. Um título de valor nominal de R\$ 500.000,00 vai ser resgatado três meses antes de seu vencimento, sob o regime de desconto comercial simples. Sabendo-se que a taxa de desconto comercial é de 96% a.a., qual o valor descontado e o valor do desconto?

Solução:

$$N = \text{R\$ } 500.000,00$$

$$n = 3 \text{ meses (períodos de antecipação)}$$

$$d = 96\% \text{ a.a.} = 8\% \text{ a.m.}$$

Valor do desconto comercial simples:

$$D_C = N \cdot d \cdot n$$

$$D_C = \text{R\$ } 500.000,00 \cdot 8\% \cdot 3$$

$$D_C = \text{R\$ } 120.000,00$$

Valor descontado comercial:

$$V_C = N - D_C$$

$$V_C = 500.000 - 120.000$$

$$V_C = \text{R\$ } 380.000,00$$

Resposta: $D_C = \text{R\$ } 120.000,00$

$$V_C = \text{R\$ } 380.000,00$$

05. Qual o prazo de antecipação de pagamento de um título, sabendo-se que o valor descontado comercial simples é três vezes o valor do desconto comercial simples e que a taxa de desconto comercial é 5% a.m.?

Solução:

$$d = 5\% \text{ a.m.}$$

$$V_C = 3D_C$$

Sabendo-se que:

$$V_C = N \cdot (1 - d \cdot n)$$

como: $V_C = 3 \cdot D_C$

temos: $3 \cdot D_C = N \cdot (1 - d \cdot n)$,

como: $D_C = N \cdot d \cdot n$

temos: $3N \cdot d \cdot n = N \cdot (1 - d \cdot n)$

então: $3 \cdot d \cdot n = 1 - d \cdot n$

$$4 \cdot d \cdot n = 1$$

$$n = \frac{1}{4 \cdot d}$$

$$n = \frac{1}{4 \cdot 5\%}$$

$$n = 5 \text{ meses}$$

Resposta: 5 meses de antecipação

06. Um título vai ser resgatado dois meses antes de seu vencimento. Sabendo que foi adotado o critério do desconto racional composto, à taxa de 15% a.m., qual o valor descontado e o desconto desse título de valor nominal igual a R\$100.000,00?

Solução:

$$N = R\$ 100.000,00$$

$$n = 2 \text{ meses (períodos de antecipação)}$$

$$i = 15\% \text{ a.m.}$$

Valor descontado

$$V = \frac{N}{(1+i)^n}$$

$$V = \frac{100.000}{(1+15\%)^2}$$

$$V = \frac{100.000}{1,322500}$$

$$V = R\$ 75.614,37$$

Valor do desconto racional composto:

$$D_R = N - V$$

$$D_R = 100.000 - 75.614,37$$

$$D_R = R\$ 24.385,63$$

Respostas: $V = R\$ 75.614,37$

$$D_R = R\$ 24.385,63$$

OUTRA SOLUÇÃO:

Lembre-se que

$$D_R = N \cdot i \cdot \frac{a}{ni}$$

$$D_R = 100.000 \cdot 15\% \cdot \frac{a}{2 \cdot 15\%}$$

$$D_R = 100.000 \cdot 15\% \cdot 1,625707$$

$$D_R = R\$ 24.385,63$$

logo:

$$V = N - D_R$$

$$V = 100.000 - 24.385,63$$

$$V = R\$ 75.614,37$$

Resposta: $D_R = R\$ 24.385,63$

$$V = R\$ 75.614,37$$

07. Um título de valor nominal de R\$ 500.000,00 vai ser resgatado três meses antes do vencimento, sob o regime de desconto racional composto. Sabendo-se que a taxa de desconto racional é de 96% a.a., qual o valor descontado e o do desconto, considerando capitalização mensal?

Solução:

$$N = R\$ 500.000,00$$

$$n = 3 \text{ meses (períodos de antecipação)}$$

$$i = 96\% \text{ a.a. (taxa nominal)}$$

$$i = 8\% \text{ a.m (taxa efetiva)}$$

Capitalização mensal:

Valor do desconto racional composto:

$$D_R = N \cdot i \cdot \frac{a}{ni}$$

$$D_R = 500.000 \cdot 8\% \cdot 2,577097$$

$$D_R = R\$ 103.083,88$$

Valor descontado racional composto:

$$V = N - D_R$$

$$V = 500.000 - 103.083,88$$

$$V = R\$ 396.916,12$$

Respostas: $D_R = R\$ 103.083,88$

$$V = R\$ 396.916,12$$

08. Um título vai ser resgatado dois meses antes de seu vencimento. Sabendo-se que foi adotado o critério do desconto comercial composto, à taxa de 15% a.m., qual o valor descontado e o desconto desse título de valor nominal igual a R\$ 100.000,00?

Solução:

$$N = R\$ 100.000,00$$

$$n = 2 \text{ meses (período de antecipação)}$$

$$d = 15\% \text{ a.m.}$$

Valor descontado comercial:

$$V_C = N (1 - d)^n$$

$$V_C = 100.000 (1 - 15\%)^2$$

$$V_C = R\$ 72.250,00$$

Valor do desconto comercial:

$$D_C = N - V_C$$

$$D_C = 100.000 - 72.250$$

$$D_C = R\$ 27.750,00$$

Respostas: $V_C = R\$ 72.250,00$

$$D_C = R\$ 27.750,00$$

09. Um título de valor nominal de R\$ 500.000,00 vai ser resgatado três meses antes de seu vencimento, sob o regime de desconto comercial composto. Sabendo-se que a taxa de desconto comercial é de 96% a.a., qual o valor descontado e o valor do desconto, considerando capitalização mensal?

Solução:

$$N = R\$ 500.000,00$$

$$n = 3 \text{ meses (períodos de antecipação)}$$

$$i = 96\% \text{ a.a. (taxa nominal)}$$

$$i = 8\% \text{ a.m. (taxa efetiva)}$$

Capitalização mensal:

Valor descontado comercial:

$$V_C = N \cdot (1 - d)^n$$

$$V_C = 500.000 \cdot (1 - 8\%)^3$$

$$V_C = 500.000 (92\%)^3$$

$$V_C = R\$ 389.344,00$$

Valor do desconto comercial:

$$D_C = N - V_C$$

$$D_C = 500.000 - 389.344$$

$$D_C = R\$ 110.656,00$$

Resposta: $V_C = R\$ 389.344,00$

$$D_C = R\$ 110.656,00$$

10. Calcule o prazo de antecipação de um título de valor nominal de R\$ 100.000,00, sabendo-se que o valor do desconto racional composto foi de R\$ 25.378,36 e a taxa de desconto foi de 5% a.m.

Solução:

$$N = R\$ 100.000,00$$

$$D_R = R\$ 25.378,36$$

$$i = 5\% \text{ a.m.}$$

Como temos:

$$D_R = N \cdot i \cdot \frac{a}{n \cdot i}$$

$$100.000 \cdot 5\% \cdot \frac{a}{n \cdot 5\%} = 25.378,36$$

$$\frac{a}{n \cdot 5\%} = 5,075673 \quad (\text{valor próximo ao da tabela})$$

logo, consultando a tabela para $i = 5\%$ temos

$$n = 6$$

Resposta: 6 meses

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (INSS/97) – Julgue os itens a seguir, relativos às diferentes maneiras com que uma nota promissória pode ser descontada.

Responder: Certo (C) ou Errado (E):

- a. () Se forem calculados a uma mesma taxa, o valor atual segundo o desconto comercial será sempre menor que o valor atual segundo o desconto racional.
- b. () O desconto bancário nada mais é do que o desconto comercial acrescido de uma taxa a título de despesas bancárias.
- c. () No desconto comercial, a taxa implícita na operação é sempre menor que a estabelecida.
- d. () A diferença entre os descontos racional e comercial, a uma mesma taxa, aumenta à medida que a data de desconto aproxima-se da data do vencimento.
- e. () Se uma nota promissória – com valor de R\$ 1.000,00 na data de vencimentos, em 2 anos – é descontada 2 anos antes do vencimento, em um banco que pratica uma taxa de desconto bancário simples de 18% a.a., então a taxa anual de juros compostos que está sendo paga pelo cliente é superior a 24% a.a.

Resposta: a. (C) b. (C) c. (E) d. (C) e. (C)

02. (BACEN/Vunesp) – O valor do desconto simples por fora, de um título de R\$ 2.000,00 com vencimento para 120 dias à taxa de 3% ao mês é, em reais,

- a. R\$ 320,00
b. R\$ 120,00
c. R\$ 240,00
d. R\$ 340,00
e. R\$ 420,00

Resposta: C

03. (BACEN/Vunesp) – O valor do desconto composto racional de um título no valor de R\$ 20.000,00, com prazo para 30 dias para vencimento e taxa cobrada de 4% ao mês, é, em reais,

- a. R\$ 620,00
b. R\$ 850,00
c. R\$ 950,00
d. R\$ 769,00
e. R\$ 820,00

Resposta: D

Capítulo 6

EQUIVALÊNCIA DE CAPITAIS

6.1 – DEFINIÇÃO

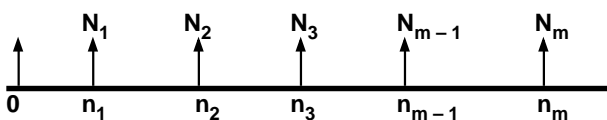
Suponhamos que os capitais N_1, N_2, \dots, N_m , deverão ser liquidados nos prazos n_1, n_2, \dots, n_m , respectivamente, contados a partir de uma época comum 0 , sendo que a taxa de juros negociada naquela época era i .

Dizemos então, que os capitais serão equivalentes na época 0 , se todos os valores anuais na época 0 forem iguais.

Observamos, que o valor atual depende do regime de capitalização. Logo precisamos separar conceito por **regime de capitalização** e por **tipo de desconto**.

Para que ajude a um entendimento esboçamos o gráfico abaixo:

$$V_1 = V_2 = V_3 = \dots = V_m$$



onde:

$V_1 = V_2 = V_3 = \dots = V_m$ são os valores atuais de $N_1, N_2, N_3, \dots, N_m$

6.2 – CAPITAIS EQUIVALENTES A JURO SIMPLES

Os capitais serão equivalentes a juros simples segundo dois tipos de desconto:

a. **Capitais equivalentes a juros simples pelo desconto racional (por dentro)** – Considerando o desconto racional simples a taxa i de desconto, teremos que os valores atuais $V_1, V_2, V_3, \dots, V_m$ satisfazem a relação:

$$\frac{N_1}{1 + i \cdot n_1} = \frac{N_2}{1 + i \cdot n_2} = \dots = \frac{N_m}{1 + i \cdot n_m}$$

b. **Capitais equivalentes a juros simples pelo desconto comercial (por fora)** – Considerando o desconto comercial simples a taxa d de desconto, teremos que os valores anuais $V_{c1}, V_{c2}, V_{c3}, \dots, V_{cm}$ satisfazem a relação:

$$N_1 \cdot (1 - d \cdot n_1) = N_2 \cdot (1 - d \cdot n_2) = \dots = N_m \cdot (1 - d \cdot n_m)$$

Obs.: Ressaltamos que no caso de capitalização simples, se os capitais são equivalentes em determinada data, não serão equivalentes em outra data.

Exemplo:

01. Qual será a taxa de desconto necessário, para que os capitais de R\$ 2.000,00 e R\$ 2.200,00 vencíveis daqui a 2 e 3 anos, respectivamente, sejam equivalentes na data atual pelo regime de capitalização simples?

Solução:

$$N_1 = \text{R\$ } 2.000,00$$

$$n_1 = 2 \text{ anos}$$

$$N_2 = \text{R\$ } 2.200,00$$

$$n_2 = 3 \text{ anos}$$

Precisamos considerar dois tipos de desconto:

a. No caso do desconto racional:

$$\frac{N_1}{1 + i \cdot n_1} = \frac{N_2}{1 + i \cdot n_2}$$

$$\frac{2.000}{1 + i \cdot 2} = \frac{2.200}{1 + i \cdot 3}$$

$$2.000 \cdot (1 + 3 \cdot i) = 2.200 \cdot (1 + 2 \cdot i)$$

daí:

$$i = 12,5\% \text{ a.a.}$$

b. No caso de desconto comercial:

$$N_1 \cdot (1 - d \cdot n_1) = N_2 \cdot (1 - d \cdot n_2)$$

$$2.000 \cdot (1 - d \cdot 2) = 2.200 \cdot (1 - d \cdot 3)$$

$$2.000 \cdot (1 - 2 \cdot d) = 2.200 \cdot (1 - 3 \cdot d)$$

Resolvendo temos:

$$d = 7,69\% \text{ a.a.}$$

Respostas: No caso de desconto racional simples a taxa é de 12,5% a.a.

No caso de desconto comercial simples a taxa é de 7,69% a.a.

6.3 – CAPITAIS EQUIVALENTES A JUROS COMPOSTOS

Os capitais são equivalentes a juros compostos, segundo dois tipos de descontos:

a. **Capitais equivalentes a juros compostos pelo desconto racional (por dentro)** – Considerando o desconto racional composto a taxa i de desconto, teremos os valores atuais V_1, V_2, \dots, V_m satisfazendo a relação:

$$\frac{N_1}{(1 + i)^{n_1}} = \frac{N_2}{(1 + i)^{n_2}} = \dots = \frac{N_m}{(1 + i)^{n_m}}$$

b. Capitais equivalentes a juros, compostos pelo desconto comercial (por fora) – Considerando o desconto comercial composto a taxa d de desconto, teremos que os valores atuais $V_{c1}, V_{c2}, \dots, V_{cm}$ satisfazem a relação:

$$N_1 \cdot (1 - d)^{n_1} = N_2 \cdot (1 - d)^{n_2} = \dots = N_m \cdot (1 - d)^{n_m}$$

Obs.: Ressaltamos que no caso de capitalização composta, quando consideramos o desconto racional composto (por dentro), os capitais são equivalentes em qualquer data.

Exemplo:

02. Qual será a taxa de desconto necessária, para que os capitais de R\$ 2.000,00 e R\$ 2.200,00 vencíveis daqui a 2 e 3 anos, respectivamente, sejam equivalentes na data atual, sob o regime de capitalização composta?

Solução:

$$N_1 = R\$ 2.000,00$$

$$n_1 = 2 \text{ anos}$$

$$N_2 = R\$ 2.200,00$$

$$n_2 = 3 \text{ anos}$$

Precisamos considerar o tipos de descontos:

a. No caso do desconto racional:

$$\frac{N_1}{(1 + i)^{n_1}} = \frac{N_2}{(1 + i)^{n_2}}$$

$$\frac{2.000}{(1 + i)^2} = \frac{2.200}{(1 + i)^3}$$

Resolvendo, temos:

$$(1 + i) = 1,10$$

$$i = 10\% \text{ a.a.}$$

b. No caso de desconto comercial

$$N_1 \cdot (1 - d)^{n_1} = N_2 \cdot (1 - d)^{n_2}$$

$$2.000 \cdot (1 - d)^2 = 2.200 (1 - d)^3$$

Resolvendo, temos:

$$d = 9,09\% \text{ a.a.}$$

Resposta: Considerando o desconto racional composto a taxa é de 10% a.a.

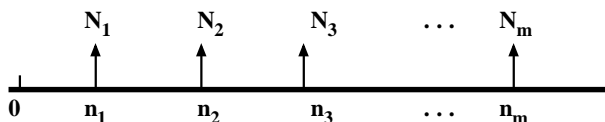
Considerando o desconto comercial composto a taxa é de 9,09% a.a.

6.4 – VALOR ATUAL DE UM CONJUNTO DE CAPITAIS

Suponhamos os capitais: N_1, N_2, \dots, N_m , nas datas n_1, n_2, \dots, n_m , contados a partir de uma época 0.

Chamaremos de valor atual na época 0, desse conjunto de capitais, a soma dos valores equivalentes desses capitais na época 0.

Assim temos:



Como os valores equivalentes dependem do regime de capitalização e do tipo de desconto, teremos vários casos:

a. REGIME DE CAPITALIZAÇÃO SIMPLES

a.1. No caso de desconto racional simples a taxa i , teremos o valor anual do conjunto de capitais (V), da seguinte forma:

$$V = \frac{N_1}{1 + i \cdot n_1} + \frac{N_2}{1 + i \cdot n_2} + \dots + \frac{N_m}{1 + i \cdot n_m}$$

a.2. No caso de desconto comercial simples a taxa d , teremos o valor atual do conjunto de capitais (V), da seguinte forma:

$$V = N_1 \cdot (1 - d \cdot n_1) + N_2 \cdot (1 - d \cdot n_2) + \dots + N_m \cdot (1 - d \cdot n_m)$$

b. REGIME DE CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA:

b.1. No caso de desconto racional composto a taxa i , teremos o valor atual do conjunto de capitais (V), da seguinte forma:

$$V = \frac{N_1}{(1 + i)^{n_1}} + \frac{N_2}{(1 + i)^{n_2}} + \dots + \frac{N_m}{(1 + i)^{n_m}}$$

b.2. No caso de desconto comercial composto a taxa d , teremos o valor atual do conjunto de capitais (V), da seguinte forma:

$$V = N_1 \cdot (1 - d)^{n_1} + N_2 \cdot (1 - d)^{n_2} + \dots + N_m \cdot (1 - d)^{n_m}$$

Exemplo:

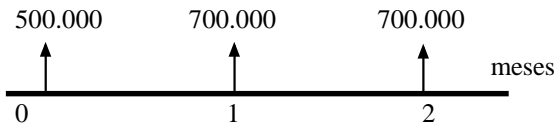
03. Um vídeo-game é vendido da seguinte forma:

Entrada de R\$ 500.000,00 e duas prestações mensais iguais a: R\$ 700.000,00.

Se a loja opera com uma taxa de desconto igual a 20% a.m., qual o preço a vista?

Solução:

Como a situação não diz qual é o regime de capitalização e qual é o tipo de desconto, faremos os 4 casos:



O preço a vista será o valor atual desse conjunto de capitais, nos seguintes casos:

a. **Sob o desconto racional simples:**

$$V = 500.000 + \frac{700.000}{1 + 20\% \cdot 1} + \frac{700.000}{1 + 20\% \cdot 2}$$

V = R\$ 1.583.333,33

b. **Sob o desconto comercial simples:**

$$V = 500.000 + 700.000 \cdot (1 - 20\% \cdot 1) + 700.000 \cdot (1 - 20\% \cdot 2)$$

V = R\$ 1.480.000,00

c. **Sob o desconto racional composto:**

$$V = 500.000 + \frac{700.000}{(1 + 20\%)^1} + \frac{700.000}{(1 + 20\%)^2}$$

V = R\$ 1.569.444,44

d. **Sob o desconto comercial composto:**

$$V = 500.000 + 700.000 \cdot (1 - 20\%) + 700.000 \cdot (1 - 20\%)^2$$

V = R\$ 1.508.000,00

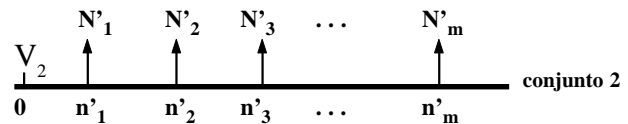
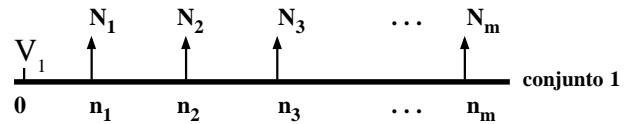
Respostas: O preço à vista será

Pelo regime de desconto racional simples:
R\$ 1.583.333,33

Pelo regime de desconto comercial simples:
R\$ 1.480.000,00

Pelo regime de desconto racional composto:
R\$ 1.569.444,44

Pelo regime de desconto comercial composto:
R\$ 1.508.000,00



Se V_1 e V_2 são os valores atuais dos conjuntos de capitais (1) e (2), na época 0, eles serão equivalentes se $V_1 = V_2$.

Obs: Aos alunos que são candidatos a concursos públicos, enfatizamos que este capítulo e o próximo são muito explorados.

Entre várias aplicações do valor atual entre conjunto de capitais está o problema de substituir um conjunto de títulos por um único, como no caso de juros simples, os capitais são equivalentes em apenas uma data, considera-se nesses problemas, a data em que foi proposta a negociação como a data focal 0 para a equivalência. Quando o regime for de juros compostos, considera-se o valor atual em qualquer data, pois são equivalentes sempre.

PROBLEMAS RESOLVIDOS

01. Um título de valor nominal de R\$ 500.000,00 com vencimento daqui a 1 mês, precisa ser trocado por outro de valor nominal de R\$ 600.000,00 com vencimento daqui a 3 meses. Supondo o critério de desconto racional simples, qual a taxa que deverá ser considerada?

Solução:

$N_1 = \text{R\$ } 500.000,00$

$n_1 = 1 \text{ mês}$

$N_2 = \text{R\$ } 600.000,00$

$n_2 = 3 \text{ meses}$

Critério de desconto racional simples:

Usando o conceito de capitais equivalentes, temos:

$$\frac{N_1}{1 + i \cdot n_1} = \frac{N_2}{1 + i \cdot n_2}$$

$$\frac{500.000}{1 + i \cdot 1} = \frac{600.000}{1 + i \cdot 3}$$

$$500.000 \cdot (1 + 3 \cdot i) = 600.000 \cdot (1 + i)$$

$i = 11,11\% \text{ a.m.}$

Resposta: a taxa de desconto racional é 11,11% a.m.

02. Um título de valor nominal de R\$ 500.000,00 com vencimento daqui a 1 mês, precisa ser trocado por outro de valor nominal de R\$ 600.000,00 com vencimento daqui a 3 meses. Supondo o critério do desconto comercial simples, qual a taxa que deverá ser considerada?

Solução:

$$N_1 = \text{R\$ } 500.000,00$$

$$n_1 = 1 \text{ mês}$$

$$N_2 = \text{R\$ } 600.000,00$$

$$n_2 = 3 \text{ meses}$$

Critério do desconto comercial simples:

Usando o conceito de capitais equivalentes, temos:

$$N_1 \cdot (1 - d \cdot n_1) = N_2 \cdot (1 - d \cdot n_2)$$

$$500.000 \cdot (1 - d \cdot 1) = 600.000 \cdot (1 - d \cdot 3)$$

Resolvendo:

$$d = 7,69\%$$

Resposta: A taxa de desconto comercial é 7,69% .a.m.

03. Precisamos trocar três títulos com vencimento daqui a 1, 2 e 3 meses, todos com valores de R\$ 1.000.000,00, por dois outros títulos de mesmo valor nominal com vencimento daqui a 4 e 6 meses. Considerando o regime de desconto comercial simples, a uma taxa de 8% a.m., qual o valor nominal desses títulos?

Solução:

O conjunto de títulos acima deve ser equivalente ao seguinte conjunto de título:

Então temos:

V_1 = Valor anual do primeiro conjunto de capitais

$$V_1 = N_1 \cdot (1 - d \cdot n_1) + N_2 \cdot (1 - d \cdot n_2) + N_3 \cdot (1 - d \cdot n_3)$$

$$V_1 = 1.000.000 \cdot (1 - 8\%) + 1.000.000 \cdot (1 - 8\% \cdot 2) + 1.000.000 \cdot (1 - 8\% \cdot 3)$$

$$V_1 = \text{R\$ } 2.520.000,00$$

V_2 = Valor anual do segundo conjunto de capitais

$$V_2 = N \cdot (1 - 8\% \cdot 4) + N \cdot (1 - 8\% \cdot 6)$$

$$V_2 = N \cdot 1,20$$

Como são equivalentes $V_1 = V_2$

$$N \cdot 1,20 = 2.520.000$$

Logo:

$$N = \text{R\$ } 2.100.000,00$$

Resposta: O valor nominal dos títulos deverá ser de R\$ 2.100.000,00

04. Um negociante tem duas dívidas a pagar, uma de R\$ 3.000,00, com 45 dias de prazo, a outra de R\$ 8.400,00 pagável em 60 dias. O negociante quer substituir essas duas dívidas por uma única, com 30 dias de prazo. Sabendo-se que a taxa de desconto comercial é de 12% a.a., o valor nominal dessa dívida será de quanto?

Solução:

O conjunto de título acima tem que ser equivalente a:

$$V_1 = 3.000 \cdot (1 - 1\% \cdot 1,5) + 8.400 \cdot (1 - 1\% \cdot 2)$$

$$V_1 = \text{R\$ } 11.187,00$$

$$V_2 = N \cdot (1 - 1\% \cdot 1) \quad \therefore \quad V_2 = 0,99 \cdot N$$

Como: $V_1 = V_2$, temos:

$$0,99 \cdot N = 11.187 \quad \rightarrow \quad N = \frac{11.187}{0,99}$$

$$N = \text{R\$ } 11.300,00$$

Resposta: O valor nominal é de R\$ 11.300,00

05. Um negociante deve pagar três títulos:

O primeiro de R\$ 150.000,00 exigível em 1 ano

O segundo de R\$ 300.000,00 exigível em 2 anos

O terceiro de R\$ 250.000,00 exigível em 3 anos

O negociante quer substituir esses três títulos por um único título de R\$ 456.762,70. Admitindo-se o regime de juros compostos e uma taxa mensal de 5%, o prazo do novo título é de?

Solução:

$$N_1 = \text{R\$ } 150.000,00 \quad n_1 = 12 \text{ meses}$$

$$N_2 = \text{R\$ } 300.000,00 \quad n_2 = 24 \text{ meses}$$

$$N_3 = \text{R\$ } 250.000,00 \quad n_3 = 36 \text{ meses}$$

O conjunto acima deve ser equivalente a:

$$N'_1 = \text{R\$ } 456.762,70 \quad n'_1 = n$$

Supondo o desconto racional composto (desconto real), já que o problema omitiu esta informação temos:

$$V_1 = \frac{150.000}{(1 + 5\%)^{12}} + \frac{300.000}{(1 + 5\%)^{24}} + \frac{250.000}{(1 + 5\%)^{36}}$$

$$V_1 = \text{R\$ } 219.711,32$$

Por outro lado:

$$V_2 = \frac{456.762,70}{(1 + 5\%)^n}$$

Como: $V_1 = V_2$

$$219.711,32 = \frac{456.762,70}{(1 + 5\%)^n}$$

$$(1 + 5\%)^n = 2,078928$$

Consultando a tabela: $n = 15$ meses

Resposta: 15 meses

Capítulo 7

RENDAS CERTAS OU ANUIDADES

7.1 – DEFINIÇÕES

Tanto pessoas físicas quanto jurídicas envolvem-se com pagamentos (ou recebimentos) sucessivos, para saldar ou receber financiamentos, esta seqüência de pagamentos chamamos de rendas certas ou anuidades.

Assim, temos $T_1, T_2, T_3 \dots$ como uma renda certa, correspondente às épocas $t_1, t_2, t_3 \dots$:

- Se a renda certa possui um número finito de termos será chamada de **temporária**, caso contrário será chamada de **perpétua** (ou perpetuidade)
- Se os termos da renda certa forem todos iguais será chamada de **renda certa de termo constante** (ou renda certa uniforme), caso contrário será chamada de **renda certa de termo variável**.

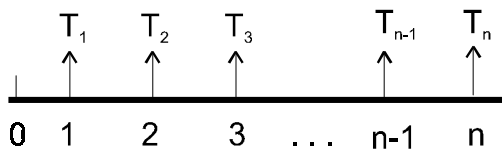
Quando as datas correspondentes aos termos das rendas certas estiverem defasadas pelo mesmo intervalo de tempo, dizemos que a renda certa é **periódica**. Caso contrário, chamamos de **não periódica**.

7.2 – CLASSIFICAÇÃO DAS RENDAS PERIÓDICAS

Veremos apenas as rendas periódicas, pois são as que ocorrem na prática com mais freqüência. As rendas certas (ou anuidades) periódicas se classificam em:

7.2.1. POSTECIPADAS

Chamamos de rendas certas (ou anuidades) periódicas postecipadas quando os pagamentos dos termos ocorrem no fim de cada período respectivo. Logo, nesse caso, não há pagamento na época de origem da transação. O fluxo de caixa seria:

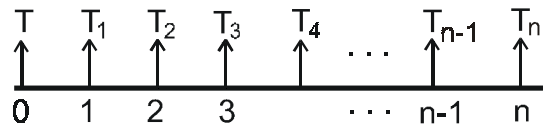


7.2.2. ANTECIPADAS

Chamamos de rendas certas (ou anuidades) periódicas antecipadas, quando os pagamentos dos termos ocorrem no início de cada período respectivo.

Logo, nesse caso, há pagamento na data de origem.

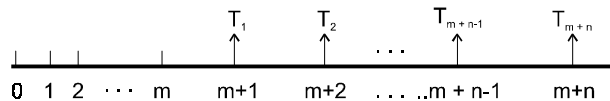
Um esboço do fluxo de caixa seria



7.2.3. DIFERIDAS

Chamamos de rendas certas (ou anuidades) periódicas diferidas, de m períodos, quando o primeiro pagamento só é efetuado no fim do período $(m + 1)$.

Um esboço do fluxo de caixa seria



7.3 – ANÁLISE DAS RENDAS CERTAS (OU ANUIDADES) PERIÓDICAS DE TERMOS CONSTANTES E TEMPORÁRIOS

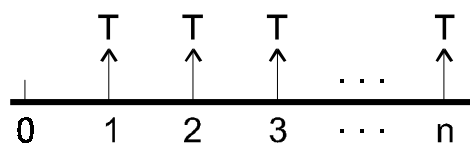
Consideramos a renda certa periódica de termo constante e temporária ($T_1 = T_2 = T_3 = \dots = T_n = T$).

Suponhamos ainda a taxa i do juro composto por período de capitalização.

Chamaremos de valor atual da renda certa (ou anuidade) a soma dos valores atuais de cada um dos seus termos.

Dessa forma temos:

7.3.1. RENDA CERTA (OU ANUIDADE) PERIÓDICA DE TERMO CONSTANTE POSTECIPADAS E TEMPORÁRIAS



daí o valor atual V da renda será:

$$V = \frac{T}{(1+i)^1} + \frac{T}{(1+i)^2} + \frac{T}{(1+i)^3} + \dots + \frac{T}{(1+i)^n}$$

Colocando T em evidência, temos:

$$V = T \cdot \left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \dots + \frac{1}{(1+i)^n} \right]$$

Aplicando a fórmula da soma de uma PG temos:

$$V = T \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n}$$

O fator: $\frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n}$ é chamado de fator de valor atual e é comumente denotado pelo símbolo:

$a_{\overline{n}|i}$: que se lê *a*, *n* cantoneira *i*

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i \cdot (1+i)^n}$$

Obs.: *a*, *n* cantoneira *i*, pode ser calculada facilmente com o uso de uma calculadora ou simplesmente ser consultada na tabela II na pág. 42.

Em resumo:

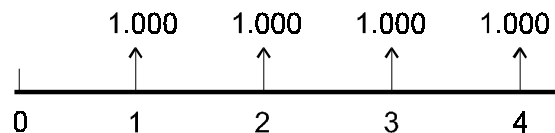
O valor atual da renda certa periódica postecipada de termo constante e temporária é:

$$V = T \cdot a_{\overline{n}|i}$$

Exemplo:

Um carro é vendido a prazo em 4 pagamentos iguais e mensais de R\$ 1.000,00, vencendo-se a primeira prestação um mês após a compra. Se a loja opera a uma taxa de juros de 8% a.m., qual o preço à vista desse carro?

Solução:



Renda postecipada

$n = 4$

$i = 8\% \text{ a.m.}$

$T = \text{R\$ } 1.000$

$$V = T a_{\overline{n}|i}$$

$$V = 1.000 a_{\overline{4}|8\%}$$

Consultando a tabela (tabela II - pág. 42) temos:

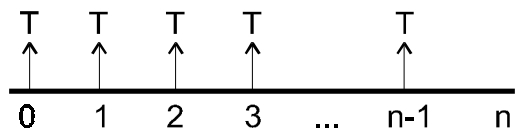
$$a_{\overline{4}|8\%} = 3,312127$$

$$V = 1.000 \cdot 3,312127$$

$$V = \text{R\$ } 3.312,12$$

Resposta: O preço à vista do carro é: R\$ 3.312,12

7.3.2. RENDA CERTA (OU ANUIDADE) PERIÓDICA DE TERMO CONSTANTE ANTECIPADA E TEMPORÁRIA



Observe que temos aqui, na renda antecipada, duas partes:

1. *T* é o valor atual do primeiro pagamento
2. Uma renda postecipada com $n - 1$ termos de pagamento.

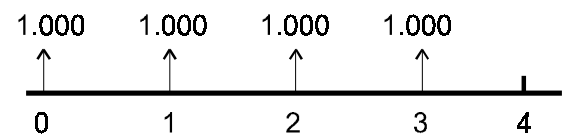
Portanto, o valor atual da renda antecipada de termo constante e temporária é:

$$V = T + T \cdot a_{\overline{n-1}|i}$$

Exemplo:

Um carro é vendido a prazo em 4 pagamentos mensais e iguais de R\$ 1.000,00, vencendo a primeira prestação no ato da compra. Se a loja opera a uma taxa de juros de 8% a.m., qual o preço à vista desse carro?

Solução:



Renda postecipada

$n = 4$

$i = 8\% \text{ a.m.}$

$T = \text{R\$ } 1.000$

$$V = T + T \cdot a_{\overline{n-1}|i}$$

$$V = 1000 + 1.000 \cdot a_{\overline{3}|8\%}$$

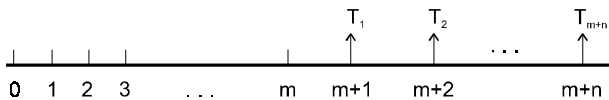
$$V = 1.000 + 1.000 \cdot 2,577097$$

$$V = 1.000 + 2.577,097$$

$$V = \text{R\$ } 3.577,09$$

Resposta: O preço à vista é R\$ 3.577,09

7.3.3. RENDA CERTA (OU ANUIDADE) PERIÓDICA DE TERMO CONSTANTE DIFERIDA DE m PERÍODOS TEMPORÁRIOS



Calcularemos o valor atual dessa renda em duas etapas:

a. Primeiro calculamos o valor anual da renda na época m :

$$V = T \cdot a_{\overline{n}|i}$$

b. Agora traremos este valor atual para a época da origem:

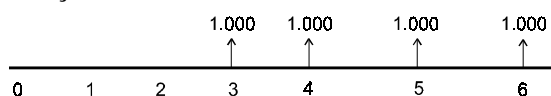
$$V = \frac{T \cdot a_{\overline{n}|i}}{(1 + i)^m}$$

Portanto, esse é o valor atual da renda periódica de termo constante diferida de m períodos temporários:

Exemplo:

Um carro é vendido a prazo em 4 pagamentos mensais e iguais de R\$ 1.000,00, vencendo a primeira prestação 3 meses após a compra. Se a loja opera a uma taxa de juros de 8% a.m., qual o preço à vista desse carro?

Solução:



$n = 4$

$m = 2$ (diferida de 2 meses)

$i = 8\%$ a.m.

$T = R\$ 1.000,00$

$$T \cdot a_{\overline{n}|i}$$

$$(1 + i)^m$$

$$1.000 \cdot a_{\overline{4}|8\%}$$

$$(1 + 8\%)^2$$

$$T = \frac{1.000 \cdot 3,312127}{(1 + 8\%)^2}$$

T = R\$ 2.839,61

Resposta: O preço à vista é R\$ 2.839,61

7.4 – MONTANTE DAS RENDAS CERTAS (OU ANUIDADES) PERIÓDICAS DE TERMOS CONSTANTES E TEMPORÁRIOS

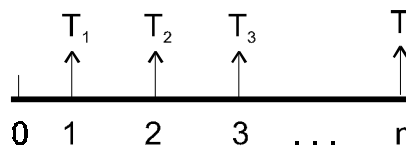
Consideraremos novamente a renda certa periódica de termo constante e temporário: $T_1 = T_2 = T_3 = \dots = T_n = T$

Suponhamos novamente a taxa i do juro composto por período de capitalização.

Chamaremos de montante (M) da renda certa (ou anuidade), na data n , ao capital único que é equivalente a toda a renda certa.

Assim, teremos:

Renda certa (ou anuidade) periódica de termo constante, postecipados e temporários.



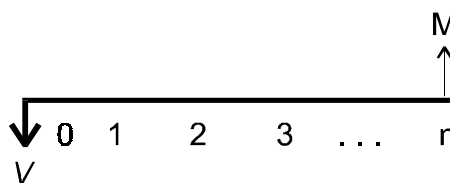
Para calcular o montante M basta lembrar que o valor atual:

$$V = T \cdot a_{\overline{n}|i}$$

deve ser equivalente a M na devida data, portanto temos:

$$M = V (1 + i)^n$$

onde M satisfaz o esquema equivalente



Daí:

$$M = T \cdot a_{\overline{n}|i} \cdot (1 + i)^n$$

Substituindo $a_{\overline{n}|i} = \frac{(1 + i)^n - 1}{(1 + i)^n \cdot i}$ na expressão acima:

Temos:

$$M = T \cdot \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

O fator:

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Será chamado de **fator de acumulação de capital**, e é indicado por:

$$S_{\overline{n}|i}$$

Lê-se **S**, **n** cantoneira **i**, o qual é tabelado no final deste trabalho.

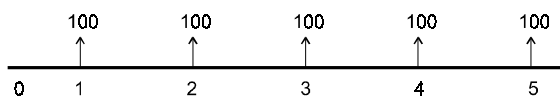
Portanto:

$$M = T \cdot S_{\overline{n}|i}$$

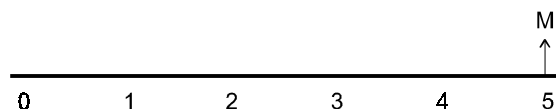
Exemplo:

Uma pessoa aplica mensalmente R\$ 100,00 em um fundo que oferece remuneração mensal à taxa de juro composto de 10% a.m.. Se a pessoa fizer 5 aplicações mensais, qual será o montante no momento da última aplicação?

Solução:



O problema quer saber qual é o montante da pessoa no mês 5.



Como:

$T = 100$

$n = 5$

$i = 10\% \text{ a.m.}$

$M = T \cdot S_{\overline{n}|i}$

$M = 100 \cdot S_{\overline{5}|10\%}$ (ver tabela III - pág. 43)

Consultando a tabela: $S_{\overline{5}|i} = 6,105100$

Daí temos:

$M = 100 \cdot 6,105100$

M = R\$ 610,51

Resposta: O montante será R\$ 610,51

7.5 – RENDA CERTA PERIÓDICA PERPÉTUA (OU INFINITA) DE TERMOS CONSTANTES

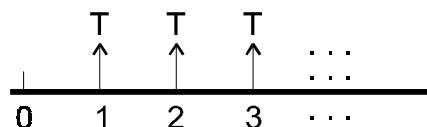
Consideremos a renda certa periódica de termo constante e perpétuo $T_1 = T_2 = T_3 = \dots = T_n = T$.

Suponhamos ainda a taxa de juro composto i , por período de capitalização.

Consideraremos o valor atual V da renda certa (ou anuidade) como sendo a soma dos infinitos valores atuais de cada um dos seus termos.

Dessa forma teremos:

7.5.1. RENDA CERTA (OU ANUIDADE) PERIÓDICA POSTECIPADAS DE TERMO CONSTANTE E PERPÉTUA



Daí o valor atual dessa renda será:

$$V = \frac{T}{(1+i)^1} + \frac{T}{(1+i)^2} + \frac{T}{(1+i)^3} + \dots + \frac{T}{(1+i)^n}$$

Colocando T em evidência, temos:

$$V = T \cdot \left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \dots \right]$$

Chamando: $\frac{1}{(1+i)^1} = g$

Temos:

$V = T \cdot [g + g^2 + g^3 + \dots]$

Observe que a soma:

$S = g + g^2 + g^3 + \dots$

Pode ser calculada da seguinte forma:

Multiplique $S = g + g^2 + g^3 + \dots + g^n$ por g , obtendo a seguinte expressão:

$g \cdot S = g^2 + g^3 + g^4 + \dots$

Faça: $S = g + g^2 + g^3 + \dots - g \cdot S = g^2 + g^3 + g^4 + \dots$

$(1 - g) \cdot S = g$

Daí:

$$S = \frac{g}{1-g}$$

Substituindo g por:

$$\frac{1}{1+i} \text{ em termos}$$

$$S = \frac{1}{i}$$

Voltando em $V = T \cdot \underbrace{[g + g^2 + g^3 + \dots]}_S$, temos a

fórmula do valor atual da renda:

$$V = \frac{T}{i}$$

EXEMPLO:

O valor anual da renda certa periódica postecipada de termo constante e perpétua a taxa de 5% a.m., com pagamento mensais de R\$ 100.000,00 é?

Solução:

$$T = \text{R\$ } 100.000,00$$

$$i = 5\%$$

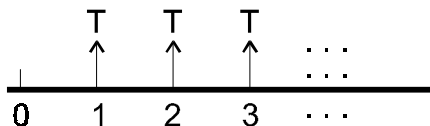
$$V = \frac{T}{i}$$

$$V = \frac{100.000}{5\%}$$

$$V = 2.000.000$$

Resposta: $V = \text{R\$ } 2.000.000,00$

7.5.2. RENDA CERTA (OU ANUIDADES PERIÓDICAS DE TERMO CONSTANTE ANTECIPADO E PERPÉTUO).



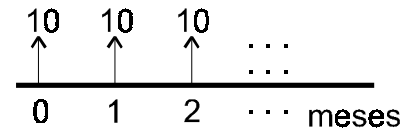
Basta observar a dedução de fórmulas e constatar que:

$$V = T + \frac{T}{i}$$

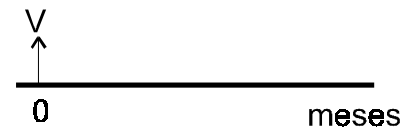
$$V = \frac{T \cdot (1+i)}{i}$$

Exemplo:

Seja o esquema de pagamentos:



Qual o valor de V para que o esquema abaixo seja equivalente ao esquema acima, considerando a taxa de juro composto de 10% a.m.



Solução:

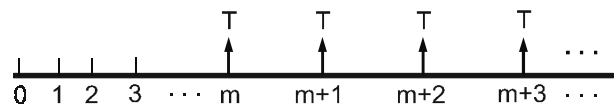
$$T = 10 \quad i = 10\% \text{ a.m.}$$

$$V = \frac{T \cdot (1+i)}{i} \rightarrow V = \frac{10 \cdot (1+10\%)}{10\%}$$

$$V = 110\%$$

Resposta: $V = 110$

7.5.3. RENDA CERTA (OU ANUIDADE) PERIÓDICA DE TERMO CONSTANTE DIFERIDA DE m PERÍODOS PERPÉTUO.



Temos:

$$V = \frac{T}{(1+i)^m \cdot i}$$

EXEMPLO:

Qual o valor atual de renda certa periódica diferida de 4 meses, com termos constantes iguais a R\$ 100.000,00, perpétua, a taxa de juro composto de 10% a.m.

Solução:

$$T = \text{R\$ } 100.000 \quad m = 4 \text{ meses} \quad i = 10\% \text{ a.m.}$$

$$V = \frac{T}{(1+i)^m \cdot i} \rightarrow V = \frac{100.000}{(1+10\%)^4 \cdot 10\%}$$

$$V = \frac{100.000}{1,464100 \cdot 0,10} \therefore V = 683.013,46$$

Resposta: O valor atual é R\$ 683.013,46

Capítulo 8

AMORTIZAÇÃO

8.1 – AMORTIZAÇÃO DE DÍVIDAS

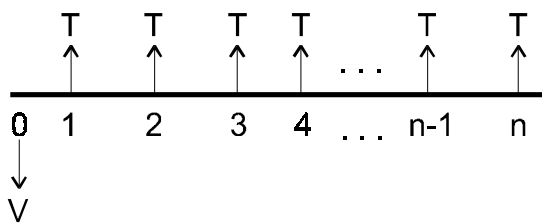
Tanto pessoas físicas quanto jurídica envolvem-se com empréstimos, devido a isto é muito comum esse assunto em alguns concursos públicos. Quando é contraído uma dívida o pagamento dela corresponde a quantia emprestada "principal" com também os juros, que é função do principal e o período de tempo do empréstimo. Fazemos questão de dizer que a amortização de uma dívida igualmente é pactuada entre as partes envolvidas podendo assim existir infinitos métodos de amortização. Porém o mais comum é considerar o regime de capitalização composta e os métodos que veremos a seguir.

8.2 – SISTEMA FRANCÊS DE AMORTIZAÇÃO (SFA)

O método Francês estipula que o devedor irá saldar a dívida através de prestações constantes efetuadas periodicamente.

Para ficar claro iremos desenvolver o modelo.

Suponhamos que um capital V seja emprestado, a taxa de juros composta i , e que a dívida será amortizada por uma sucessão de n prestações periódica e iguais a T . Suponha ainda que o período a que se refere a taxa coincida com período de pagamento das prestações, então teremos, do ponto de vista do credor.



É evidente que temos uma renda certa periódica, uniforme, postecipada Logo o valor da prestação será dada pela relação.

$$V = T \cdot a_{\overline{n}|i}$$

Portanto a prestação será:

$$T = V \cdot a_{\overline{n}|i}^{-1}$$

ou

$$T = \frac{V}{a_{\overline{n}|i}}$$

Exemplo:

Um indivíduo contrai uma dívida de 4.355,26, que deverá ser amortizada, pelo método francês, com 6 prestações anuais, á taxa de 10% a.a. Qual o valor da prestação?

Solução:

$$V = R\$ 4.355,26.$$

$$n = 6 \text{ prestações anuais}$$

$$i = 10\% \text{ a.a.}$$

$$T = ?$$

$$T = V \cdot a_{\overline{n}|i}^{-1}$$

$$T = 4.355,26 \cdot a_{\overline{6}|10\%}^{-1}$$

$$T = 4.355,26 \cdot \frac{1}{a_{\overline{6}|10\%}}$$

$$T = 4.355,26 \cdot \frac{1}{4.355,26}$$

$$T = R\$ 1.000,00$$

Continuaremos então estudando o modelo do método francês.

No instante zero (0) do empréstimo temos:

Dívida V

No instante um (1), momento de pagamento da primeira prestação.

Dívida $V + i \cdot V$

dívida: $V + i \cdot V$ (antes de ser paga)

Prestação a ser paga: $V \cdot a_{\overline{n}|i}$

dívida: $V + i \cdot V - V \cdot a_{\overline{n}|i}^{-1} - V \cdot i$

logo: $a_1 = V \cdot [a_{\overline{n}|i}^{-1} - i]$ ou

$$a_1 = V \cdot \left[\frac{1}{a_{\overline{n}|i}} - i \right]$$

Observe que a prestação paga $V \cdot a_{\overline{n}|i}$ refere-se a duas parcelas [pagamento de juros ($V \cdot i$) e amortização da dívida].

Logo seja a_1 a primeira amortização, então teremos:

$$a_1 = V \cdot \underset{n|i}{a}^{-1} - V \cdot i$$

Logo: $a_1 = V \cdot \left[\underset{n|i}{a}^{-1} - i \right]$ ou

$$a_1 = V \cdot \left[\frac{1}{\underset{n|i}{a}} - i \right]$$

Daí, teremos:

$$a_1 = V \cdot \left[\underset{n|i}{a}^{-1} - i \right] = V \cdot \left[\frac{1}{\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}} - i \right]$$

$$a_1 = V \cdot \left[\frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} - i \right]$$

$$a_1 = V \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

Portanto:

$$a_1 = V \cdot \frac{1}{\underset{n|i}{S}}$$

ou

$$a_1 = V \cdot \underset{n|i}{S}^{-1}$$

Continuando poderemos demonstrar que:

- se a_1 – a primeira amortização
- a_2 – a segunda amortização
- a_3 – a terceira amortização
-
-
- a_k – a K-ésima amortização

Temos:

- $a_2 = (1+i) \cdot a_1$
- $a_3 = (1+i) \cdot a_2$
-
-
-
- $a_k = (1+i) \cdot a_{k-1}$

Logo:

$$a_k = (1+i)^{k-1} \cdot a_1$$

Podemos calcular também o saldo devedor imediatamente após da K-esima prestação.

Seja V_k - saldo devedor após da K-ésima prestação.

E fácil dizer que:

$$V_k = T \cdot \underset{n-k|i}{a}$$

Prestação no método francês:

$$a_1 = V \cdot \underset{n|i}{a}^{-1} \text{ ou } a_1 = \frac{V}{\underset{n|i}{a}}$$

Primeira amortização no método francês:

$$a_1 = V \cdot \left[\underset{n|i}{a}^{-1} - i \right] \text{ ou } a_1 = V \cdot \left[\frac{1}{\underset{n|i}{a}} - i \right]$$

ou

$$a_1 = \frac{V}{\underset{n|i}{S}} \text{ ou } a_1 = V \cdot \underset{n|i}{S}^{-1}$$

A K-esima amortização no método francês.

$$a_k = (1+i)^{k-1} \cdot a_1$$

Saldo devedor após do pagamento da K-esima prestação.

$$V_k = T \cdot \underset{n-k|i}{a}$$

EXEMPLO:

Com os dados do exemplo anterior, temos:

$V = R\$ 4.355,26$

$n = 6$

$T = R\$ 1.000,00$

$i = 10\% \text{ a.a.}$

$$a_1 = \frac{V}{\underset{n|i}{S}} = \frac{4.355,26}{\underset{6|10\%}{S}} = \frac{4.355,26}{7,7156} = 564,48$$

- $a_k = (1+i)^{k-1} \cdot a_1$
- $a_2 = (1+10\%)^1 \cdot 564,48 = 620,92$
- $a_3 = (1+10\%)^2 \cdot 564,48 = 683,01$
- $a_4 = (1+10\%)^3 \cdot 564,48 = 751,31$
- $a_5 = (1+10\%)^4 \cdot 564,48 = 826,45$
- $a_6 = (1+10\%)^5 \cdot 564,48 = 909,09$

Podemos agora construir a tabela de amortização a seguir:

Ano	Estado da dívida	Prestação	Amortização	Juros
0	4.355,26			
1	3.790,78	1000	564,48	435,52
2	3.169,86	1000	620,92	379,08
3	2.486,85	1000	683,01	316,99
4	1.735,54	1000	751,31	248,69
5	909,09	1000	826,45	173,55
6	0	1000	909,09	90,91
Total		6000	4.355,26	1.644,74

8.3 – SISTEMA PRICE

É um caso particular do sistema de amortização francês com as seguintes características.

- Os pagamentos são mensais.
- A taxa de juros compostos é dada em um período anual.
- Usaremos a taxa efetiva como sendo a taxa proporcional a taxa anual dada.

EXEMPLO:

Um indivíduo efetuou uma dívida de R\$ 200.000,00 sabendo que a taxa de juro cobrada pela instituição é de 12% a.a. que a dívida deve ser saldada em 6 meses calcule o valor das prestações pelo sistema price.

Solução:

$$V = R\$ 200.000,00$$

$$n = 6 \text{ meses}$$

$$i = 12\% \text{ a.a.} = 1\%$$

$$T = \frac{T}{a_{\overline{n}|i}} = \frac{200.000}{a_{\overline{6}|1\%}}$$

$$T = \frac{200.000}{5,79548}$$

$$T = R\$ 34.509,65$$

Obs: Chamamos de tabela Price a tabela que considera a taxa proporcional.

8.4 – SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE (SAC)

Neste sistema o pagamento das prestações são periódicas, sendo que a amortização é constante.

Sendo assim temos:

- Amortização no SAC:**

$$a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = \frac{V}{n}$$

- Primeira prestação no SAC:**

$$T_1 = \frac{V}{n} \cdot [1 + i \cdot (n - k + 1)]$$

Saldo devedor antes de K-esima prestação.

$$V_k = V - \frac{(k-1) \cdot V}{n}$$

Exemplo:

Uma financeira faz um empréstimo de R\$ 300.000,00 para ter pago pelo Sistema de Amortização Constante em 5 prestações anuais a taxa de 4% a.a. Monte o quadro de amortização.

Solução:

$$V = R\$ 300.000,00$$

$$n = 5 \text{ prestações}$$

$$i = 4\% \text{ a.a.}$$

Amortizações:

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = \frac{300.000,00}{5}$$

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = R\$ 60.000,00$$

Prestações:

Primeira:

$$T_1 = \frac{V}{n} \cdot (1 + n \cdot i) = \frac{300.000,00}{5} \cdot (1 + 4\% \cdot 5)$$

$$T_1 = R\$ 120.000,00$$

Segunda:

$$T_2 = \frac{V}{n} \cdot [1 + i \cdot (n - 2 + 1)]$$

$$T_2 = \frac{300.000,00}{5} \cdot [1 + 4\% \cdot (5 - 2 + 1)]$$

$$T_2 = R\$ 116.000,00$$

Terceira:

$$T_3 = \frac{V}{n} \cdot [1 + i \cdot (n - 3 + 1)]$$

$$T_3 = \frac{500.000,00}{5} \cdot [1 + 4\% \cdot (5 - 3 + 1)]$$

T₃ = R\$ 112.000,00

Quarta:

$$T_4 = \frac{V}{n} \cdot [1 + i \cdot (n - 4 + 1)]$$

$$T_4 = \frac{500.000,00}{5} \cdot [1 + 4\% \cdot (5 - 4 + 1)]$$

T₄ = R\$ 108.000,00

Quinta:

$$T_5 = \frac{V}{n} \cdot [1 + i \cdot (n - 5 + 1)]$$

$$T_5 = \frac{500.000,00}{5} \cdot [1 + 4\% \cdot (5 - 5 + 1)]$$

T₅ = R\$ 104.000,00

Saldo devedor:

Antes da 1ª prestação

$$V_1 = V = R\$ 500.000,00$$

Antes da 2ª prestação

$$V_2 = V - \frac{V}{n} = 500.000,00 - 100.000,00$$

V₂ = R\$ 400.000,00

Antes da 3ª prestação

$$V_3 = V - 2 \frac{V}{n} = 500.000,00 - 200.000,00$$

V₃ = R\$ 300.000,00

Antes da 4ª prestação

$$V_4 = V - 3 \frac{V}{n} = 500.000,00 - 300.000,00$$

V₄ = R\$ 200.000,00

Antes da 5ª prestação

$$V_5 = V - 4 \frac{V}{n} = 500.000,00 - 400.000,00$$

V₅ = R\$ 100.000,00

Logo teremos o quadro:

Ano	Estado da Dívida	Prestação	Amortização	Juros
0	500.000			
1	400.000	120.000	100.000	20.000
2	300.000	116.000	100.000	16.000
3	200.000	112.000	100.000	12.000
4	100.000	108.000	100.000	8.000
5	0	104.000	100.000	4.000
Total	--	560.000	500.000	60.000

8.5 – SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO MISTO (SAM)

É o sistema que considera às prestações como sendo a média aritmética entre o sistema francês e o sistema de amortização constante.

8.6 – SISTEMA AMERICANO DE AMORTIZAÇÃO (SAA)

Nesse sistema de amortização as prestações são apenas os juros do capital emprestada, sendo que este principal somente é restituído no momento da última prestação.

Geralmente o devedor quer evitar um desembolso de todo o capital no fim do prazo, podendo então formar um fundo de amortização de tal maneira que na época da última prestação o saldo desse fundo seja igual ao principal a pagar.

A este fundo damos o nome de **SINKING FUND**.

EXEMPLO:

Um indivíduo toma emprestado R\$ 500.000,00 pelo prazo de 4 meses, a taxa de 8% a.m. A instituição opera com o **SAA**. Sendo assim cria-se um **SINKING FUND** com depósitos mensais de 6% a.m.

Efetuar a planilha de amortização e a do **SINKING FUND**.

Solução:

$V = R\$ 500.000,00$

$n = 4$ meses

$i = 8\%$ a.m.

Os juros serão constantes e iguais a:

$J = C \cdot i = 500.000 \cdot 8\% = R\$ 40.000,00$

Ano	Estado da Dívida	Prestação	Amortização	Juros
0	500.000			
1	500.000	40.000	0	40.000
2	500.000	40.000	0	40.000
3	500.000	40.000	0	40.000
4	0	540.000	500.000	40.000
Total	--	660.000	500.000	160.000

Evolução do SINKING FUND

$M = T \cdot S_{\overline{n}|i} \therefore 500.000 = T \cdot S_{\overline{4}|6\%}$

$T = \frac{500.000}{S_{\overline{4}|6\%}} = \frac{500.000}{4,37462}$

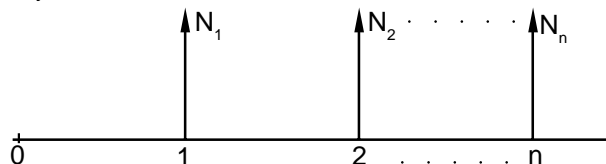
SINKING FUND

Meses	Depósitos	Saldo
0		0
1	114.295,64	114.295,64
2	114.295,64	235.449,02
3	114.295,64	363.871,60
4	114.295,64	500.000,00

8.7 - TAXA INTERNA DE RETORNO (TIR)

É a taxa que anula o valor presente líquido.

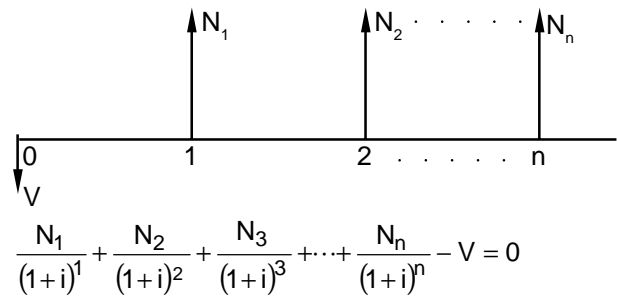
Seja V o valor atual do fluxo de caixa abaixo:



Consideraremos i como sendo a taxa que satisfaz a equação:

$$VPL = \frac{N_1}{(1+i)^1} + \frac{N_2}{(1+i)^2} + \frac{N_3}{(1+i)^3} + \dots + \frac{N_n}{(1+i)^n}$$

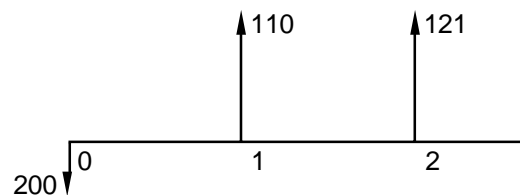
Isto é, a taxa i que torna o fluxo de caixa igual a zero.



A taxa i será chamada de Taxa Interna de Retorno (TIR).

Exemplos:

01. Seja o fluxo de caixa:



Qual a taxa interna de retorno?

Solução:

$$\frac{110}{(1+i)^1} + \frac{121}{(1+i)^2} - 200 = 0$$

$$110 \cdot (1+i) + 121 - 200 \cdot (1+i)^2 = 0$$

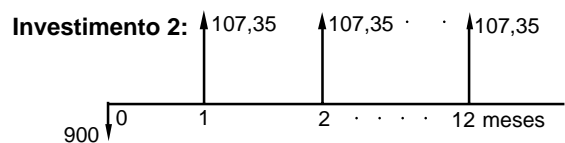
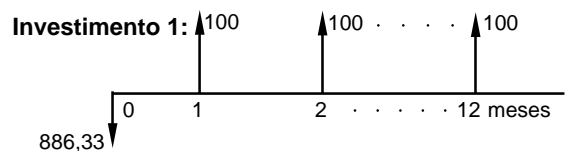
$$200 \cdot i^2 + 290 \cdot i - 31 = 0$$

$$i = \frac{-290 \pm 330}{400}$$

Teremos então que o único valor possível para a taxa interna de retorno é $i = 10\%$.

Portanto, a taxa que torna o fluxo de caixa acima igual a zero é $TIR = 10\%$.

02. Um investidor possui duas alternativas de aplicações de um capital durante um ano, conforme o fluxo de caixa abaixo:



Qual dos investimentos é o mais atrativo?

Solução:

Quando comparamos dois investimentos, o mais atrativo será o que possui a maior taxa interna de retorno.

Então, vamos calcular a taxa interna de retorno do investimento 1:

$$V = T \cdot a_{\overline{n}|i}$$

$$V = 100 \cdot a_{\overline{12}|i}$$

$$886,33 = 100 \cdot a_{\overline{12}|i}$$

$$8,8633 = a_{\overline{12}|i}$$

$$a_{\overline{12}|i} = 8,8633$$

Pela tabela 2 temos $i = 5\%$ a.m. Então, $TIR_1 = 5\%$ a.m.

Analogamente, no investimento 2 temos:

$$V = T \cdot a_{\overline{n}|i}$$

$$900 = 107,35 \cdot a_{\overline{12}|i}$$

$$8,3838 = a_{\overline{12}|i}$$

$$a_{\overline{12}|i} = 8,3838$$

Pela tabela 2 temos $i = 6\%$ a.m. Então, $TIR_2 = 6\%$ a.m.

Logo, como $TIR_2 > TIR_1$, temos que o investimento 2 é o mais atrativo.

8.8 – CUSTO DE OPORTUNIDADE

O custo de oportunidade mede o recurso financeiro sacrificado quando optamos por uma alternativa de investimento em lugar de outro. Por exemplo, o curso Pré-fiscal decidiu investir seus recursos financeiros neste material didático, então o custo de oportunidade deste investimento é quanto deixou de ganhar por não ter aplicado seus recursos em algum outro investimento de títulos do governo. Grande parte dos contadores e economistas criticam o uso do custo de oportunidade na comparação dos investimentos, pois na realidade os riscos influem, tornando inócua a comparação.

Suponhamos que um investidor tem como retorno no mercado financeiro uma taxa de 10% a.a.. Suponhamos ainda que resolva aplicar o capital de R\$ 100.000,00 em uma

fábrica de barquinhos de papel, temos então que o custo de oportunidade é R\$ 10.000,00 em um ano. Então, no fim do primeiro ano, a empresa tem os seguintes resultados:

Receita: R\$ 110.000,00

Custo dos Produtos:

Matéria Prima: R\$ 15.000,00

Mão-de-obra: R\$ 20.000,00

Depreciação: R\$ 10.000,00

Aluguel: R\$ 40.000,00

Impostos: R\$ 5.000,00

Outros: R\$ 5.000,00

(R\$ 95.000,00)

Lucro: R\$ 15.000,00

Logo, considerando o custo de oportunidade de R\$ 10.000,00, teríamos como resultado positivo R\$ 5.000,00, que seria o ganho real acima do juro do capital investido.

8.9 – TAXA EQUIVALENTE AO OVER

Inicialmente vamos descrever alguns títulos do governo, com a finalidade de tornar mais clara a utilização da taxa equivalente ao over. Tais títulos são o BBC, CDB, RDB, etc.

8.9.1. BÔNUS DO BANCO CENTRAL (BBC)

Trata-se de um título emitido pelo Banco Central (BACEN), cujo objetivo é servir de instrumento de política monetária. Este título possui o valor nominal múltiplo de R\$ 1.000,00 (um mil reais), com rentabilidade sob forma de desconto e prazo múltiplo de 7 (28, 35, 42, 49 e 56 dias), mínimo de 28 dias. Os BBC's são colocados no mercado através de leilões nas terças-feiras (ou no 1º dia útil subsequente) e os resgates sempre ocorrem nas quartas-feiras.

Observação: consideraremos nos exercícios os resgates por:

$$PU = \frac{N}{(1 + i)^{n/360}}$$

onde: **PU** = Preço Unitário (preço pago pelas instituições financeiras)

N = Valor Nominal (resgate do BACEN, múltiplo de 1000)

n = prazo do título

i = taxa anual

8.9.2. CERTIFICADO DE DEPÓSITO BANCÁRIO (CDB)

O CDB é uma promessa de pagamento a ordem, emitido pelos bancos comerciais, de investimento em favor dos respectivos depositantes da importância depositada mais o valor de uma rentabilidade negociada. O prazo mínimo é 30 (trinta) dias, atualmente, com remuneração pré-fixada. Está previsto também prazos mínimos de quatro meses com remuneração pós-fixada.

8.9.3. RECIBO DE DEPÓSITO BANCÁRIO (RDB)

Os RDB's são recibos de depósitos a prazo fixo emitido também pelas mesmas instituições financeiras, com os mesmos prazos e rentabilidades análogas, sendo que todos os títulos são nominativos - intransferíveis e escriturais.

Atualmente o mercado financeiro utiliza a taxa Over nas operações financeiras, nos certificados de depósitos interbancários (CDI) ou bônus do Banco Central. A taxa Over é nominal em trinta dias com juros diários calculados na quantidade de dias úteis do período das operações financeiras.

Exemplo:

01. Suponhamos um custo efetivo do capital de 1,9% a.m., um spread de 2% a.m. com prazo total de 32 dias e 20 dias úteis da operação. Isto é:

$$i_{\text{efetivo}} = 1,90\% \text{ a.m.}$$

$$i_{\text{spread}} = 2\% \text{ a.m.}$$

$$n = \text{prazo total} = 32 \text{ dias}$$

$$du = \text{dias úteis da operação} = 20 \text{ dias}$$

Então teríamos a taxa efetiva + spread, calculada pela fórmula:

$$i = (1 + i_{\text{efetiva}}) \cdot (1 + i_{\text{spread}}) - 1$$

Nos nosso exemplo temos:

$$i = (1 + 1,90\%) \cdot (1 + 2\%) - 1$$

$$i = (1,019) \cdot (1,02) - 1$$

$$i = 3,94\% \text{ a.m. (taxa efetiva anexada do spread)}$$

Obs.: O que é spread? Segundo o professor Laurence J. Gitman, spread é a diferença entre o que os bancos remuneram os depósitos e o que cobram dos tomadores de empréstimos.

8.9.4. OBTENÇÃO DA TAXA OVER

Podemos obter a taxa over da seguinte maneira:

$$i_{\text{over}} = \left\{ \left[(1 + i) \frac{dt}{30} \right]^{\frac{1}{du}} - 1 \right\} \cdot 30$$

Onde: i_{over} = taxa over

dt = prazo total

du = dias úteis

Então teremos:

$$i_{\text{over}} = \left\{ \left[(1 + 3,94\%) \frac{32}{30} \right]^{\frac{1}{20}} - 1 \right\} \cdot 30$$

$$i_{\text{over}} = \left\{ \left[(1,0394) \frac{32}{30} \right]^{\frac{1}{20}} - 1 \right\} \cdot 30$$

$$i_{\text{over}} = \left\{ [1,042081]^{\frac{1}{20}} - 1 \right\} \cdot 30$$

$$i_{\text{over}} = \{1,002063 - 1\} \cdot 30$$

$$i_{\text{over}} = 0,002063 \cdot 30$$

$$i_{\text{over}} = 6,19\% \text{ a.m. (nominal)}$$

Logo teríamos 0,002063 como coeficiente diário e 6,19% a.m. como taxa over.

02. Em um leilão efetuado pelo BACEN, um banco adquiriu BBC com prazo de 28 dias e taxa de juros de 36% a.a. Qual o preço pago pelo banco para cada R\$1000,00 de resgate?

Solução:

$$N = \text{R\$1000,00 (resgate)}$$

$$i = 36\% \text{ a.a.}$$

$$n = 28 \text{ dias}$$

$$PU = \frac{N}{(1 + i)^{n/360}}$$

$$PU = \frac{1.000}{(1 + 36\%)^{28/360}}$$

$$PU = \frac{1.000}{1,024204}$$

PU = R\$ 976,00 por lote de R\$ 1000,00 de resgate

Tabela I – Fator de Capitalização — $(1 + i)^n$

n/i	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%	16%	17%	18%
1	1.010000	1.020000	1.030000	1.040000	1.050000	1.060000	1.070000	1.080000	1.090000	1.100000	1.110000	1.120000	1.130000	1.140000	1.150000	1.160000	1.170000	1.180000
2	1.020100	1.040400	1.060900	1.081600	1.102500	1.123600	1.144900	1.166400	1.188100	1.210000	1.232100	1.254400	1.276900	1.299600	1.322500	1.345600	1.368900	1.392400
3	1.030301	1.061208	1.092727	1.124864	1.157625	1.191016	1.225043	1.259712	1.295029	1.331000	1.367631	1.404928	1.442897	1.481544	1.520875	1.560896	1.601613	1.643032
4	1.040604	1.082432	1.125509	1.169859	1.215506	1.262477	1.310796	1.360489	1.411582	1.464100	1.518070	1.573519	1.630474	1.688960	1.749006	1.810639	1.873887	1.938778
5	1.051010	1.104081	1.159274	1.216653	1.276282	1.338226	1.402552	1.469328	1.538624	1.610510	1.685058	1.762342	1.842435	1.925415	2.011357	2.100342	2.192448	2.287758
6	1.061520	1.126162	1.194052	1.265319	1.340096	1.418519	1.500730	1.586874	1.677100	1.771561	1.870415	1.973823	2.081952	2.194973	2.313061	2.436396	2.565164	2.699554
7	1.072135	1.148686	1.229874	1.315932	1.407100	1.503630	1.605781	1.713824	1.828039	1.948717	2.076160	2.210681	2.352605	2.502269	2.660020	2.826220	3.001242	3.185474
8	1.082857	1.171659	1.266770	1.368569	1.477455	1.593848	1.718186	1.850930	1.992563	2.143589	2.304538	2.475963	2.658444	2.852586	3.059023	3.278415	3.511453	3.758859
9	1.093685	1.195093	1.304773	1.423312	1.551328	1.689479	1.838459	1.999005	2.171893	2.357948	2.558037	2.773079	3.004042	3.251949	3.517876	3.802961	4.108400	4.435454
10	1.104622	1.218994	1.343916	1.480244	1.628895	1.790848	1.967151	2.158925	2.367364	2.593742	2.839421	3.105848	3.394567	3.707221	4.045558	4.411435	4.806828	5.233836
11	1.115668	1.243374	1.384234	1.539454	1.710339	1.898299	2.104852	2.331639	2.580426	2.853117	3.151757	3.478550	3.835861	4.226232	4.652391	5.117265	5.623989	6.175926
12	1.126825	1.268242	1.425761	1.601032	1.795856	2.012196	2.252192	2.518170	2.812665	3.138428	3.498451	3.895976	4.334523	4.817905	5.350250	5.936027	6.580067	7.287593
13	1.138093	1.293607	1.468534	1.665074	1.885649	2.132928	2.409845	2.719624	3.065805	3.452271	3.883280	4.363493	4.898011	5.492411	6.152788	6.885791	7.698679	8.599359
14	1.149474	1.319479	1.512590	1.731676	1.979932	2.260904	2.578534	2.937194	3.341727	3.797498	4.310441	4.887112	5.534753	6.261349	7.075706	7.987518	9.007454	10.147244
15	1.160969	1.345868	1.557967	1.800944	2.078928	2.396558	2.759032	3.172169	3.642482	4.177248	4.784589	5.473566	6.254270	7.137938	8.137062	9.265521	10.538721	11.973748
16	1.172579	1.372786	1.604706	1.872981	2.182875	2.540352	2.952164	3.425943	3.970306	4.594973	5.310894	6.130394	7.067326	8.137249	9.357621	10.748004	12.330304	14.129023
17	1.184304	1.400241	1.652848	1.947900	2.292018	2.692773	3.158815	3.700018	4.327633	5.054470	5.895093	6.866041	7.986078	9.276464	10.761264	12.467685	14.426456	16.672247
18	1.196147	1.428246	1.702433	2.025817	2.406619	2.854339	3.379932	3.996019	4.717120	5.559917	6.543553	7.689966	9.024268	10.575169	12.375454	14.462514	16.878953	19.673251
19	1.208109	1.456811	1.753506	2.106849	2.526950	3.025600	3.616528	4.315701	5.141661	6.115909	7.263344	8.612762	10.197423	12.055693	14.231772	16.776517	19.748375	23.214436
20	1.220190	1.485947	1.806111	2.191123	2.653298	3.207135	3.869684	4.660957	5.604411	6.727500	8.062312	9.646293	11.523088	13.743490	16.366537	19.460759	23.105599	27.393035

Tabela II – Fator de Valor Atual de uma Série de Pagamentos

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

n/i	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%	16%	17%	18%
1	0.990099	0.980392	0.970874	0.961538	0.952381	0.943396	0.934579	0.925926	0.917431	0.909091	0.900901	0.892857	0.884956	0.877193	0.869565	0.862069	0.854701	0.847458
2	1.970395	1.941561	1.913470	1.886095	1.859410	1.833393	1.808018	1.783265	1.759111	1.735537	1.712523	1.690051	1.668102	1.646661	1.625709	1.605232	1.585214	1.565642
3	2.940985	2.883883	2.828611	2.775091	2.723248	2.673012	2.624316	2.577097	2.531295	2.486852	2.443715	2.401831	2.361153	2.321632	2.283225	2.245890	2.209585	2.174273
4	3.901966	3.807729	3.717098	3.629895	3.545951	3.465106	3.387211	3.312127	3.239720	3.169865	3.102446	3.037349	2.974471	2.913712	2.854978	2.798181	2.743235	2.690062
5	4.853431	4.713460	4.579707	4.451822	4.329477	4.212364	4.100197	3.992710	3.889651	3.790787	3.695897	3.604776	3.517231	3.433081	3.352155	3.274294	3.199346	3.127171
6	5.795476	5.601431	5.417191	5.242137	5.075692	4.917324	4.766540	4.622880	4.485919	4.355261	4.230538	4.111407	3.997550	3.888668	3.784483	3.684736	3.589185	3.497603
7	6.728195	6.471991	6.230283	6.002055	5.786373	5.582381	5.389289	5.206370	5.032953	4.868419	4.712196	4.563757	4.422610	4.288305	4.160420	4.038565	3.922380	3.811528
8	7.651678	7.325481	7.019692	6.732745	6.463213	6.209794	5.971299	5.746639	5.534819	5.334926	5.146123	4.967640	4.798770	4.638864	4.487322	4.343591	4.207163	4.077566
9	8.566018	8.162237	7.786109	7.435332	7.107822	6.801692	6.515232	6.246888	5.995247	5.759024	5.537048	5.328250	5.131655	4.946372	4.771584	4.606544	4.450566	4.303022
10	9.471305	8.982585	8.530203	8.110896	7.721735	7.360087	7.023582	6.710081	6.417658	6.144567	5.889232	5.650223	5.426243	5.216116	5.018769	4.833227	4.658604	4.494086
11	10.367628	9.786848	9.252624	8.760477	8.306414	7.886875	7.498674	7.138964	6.805191	6.495061	6.206515	5.937699	5.686941	5.452733	5.233712	5.028644	4.836413	4.656005
12	11.255077	10.575341	9.954004	9.385074	8.863252	8.383844	7.942686	7.536078	7.160725	6.813692	6.492356	6.194374	5.917647	5.660292	5.420619	5.197107	4.988387	4.793225
13	12.133740	11.348374	10.634955	9.985648	9.393573	8.852683	8.357651	7.903776	7.486904	7.103356	6.749870	6.423548	6.121812	5.842362	5.583147	5.342334	5.118280	4.909513
14	13.003703	12.106249	11.296073	10.563123	9.898641	9.294984	8.745468	8.244237	7.786150	7.366687	6.981865	6.628168	6.302488	6.002072	5.724476	5.467529	5.229299	5.008062
15	13.865053	12.849264	11.937935	11.118387	10.379658	9.712249	9.107914	8.559479	8.060688	7.606080	7.190870	6.810864	6.462379	6.142168	5.847370	5.575456	5.324187	5.091578
16	14.717874	13.577709	12.561102	11.652296	10.837770	10.105895	9.446649	8.851369	8.312558	7.823709	7.379162	6.973986	6.603875	6.265060	5.954235	5.668497	5.405288	5.162354
17	15.562251	14.291872	13.166118	12.165669	11.274066	10.477260	9.763223	9.121638	8.543631	8.021553	7.548794	7.119630	6.729093	6.372859	6.047161	5.748704	5.474605	5.222334
18	16.398269	14.992031	13.753513	12.659297	11.689587	10.827603	10.059087	9.371887	8.755625	8.201412	7.701617	7.249670	6.839905	6.467420	6.127966	5.817848	5.533851	5.273164
19	17.226008	15.678462	14.323799	13.133939	12.085321	11.158116	10.335595	9.603599	8.950115	8.364920	7.839294	7.365777	6.937969	6.550369	6.198231	5.877455	5.584488	5.316241
20	18.045553	16.351433	14.877475	13.590326	12.462210	11.469921	10.594014	9.818147	9.128546	8.513564	7.963328	7.469444	7.024752	6.623131	6.259331	5.928841	5.627767	5.352746

Tabela III – Fator de Acumulação de Capital de uma Série de Pagamentos $s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$

n\i	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%	11%	12%	13%	14%	15%	16%	17%	18%
1	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
2	2.01000	2.02000	2.03000	2.04000	2.05000	2.06000	2.07000	2.08000	2.09000	2.10000	2.11000	2.12000	2.13000	2.14000	2.15000	2.16000	2.17000	2.18000
3	3.03010	3.06040	3.09090	3.12160	3.15250	3.18360	3.21490	3.24640	3.27810	3.31000	3.34210	3.37440	3.40690	3.43960	3.47250	3.50560	3.53890	3.57240
4	4.06040	4.12161	4.18363	4.24646	4.31013	4.37462	4.43994	4.50611	4.57313	4.64100	4.70973	4.77933	4.84980	4.92114	4.99337	5.06650	5.14051	5.21543
5	5.10101	5.20404	5.30914	5.41632	5.52563	5.63709	5.75074	5.86660	5.98471	6.10510	6.22780	6.35285	6.48027	6.61010	6.74238	6.87714	7.01440	7.15421
6	6.15202	6.30812	6.46841	6.63298	6.80191	6.97532	7.15329	7.33593	7.52333	7.71561	7.91286	8.11519	8.32271	8.53552	8.75374	8.97748	9.20685	9.44197
7	7.21354	7.43428	7.66246	7.89829	8.14201	8.39384	8.65402	8.92280	9.20043	9.48717	9.78327	10.08901	10.40466	10.73049	11.06680	11.41387	11.77201	12.14152
8	8.28567	8.58297	8.89234	9.21423	9.54911	9.89747	10.25980	10.63663	11.02847	11.43589	11.85943	12.29969	12.75726	13.23276	13.72682	14.24009	14.77325	15.32700
9	9.36853	9.75463	10.15911	10.58280	11.02656	11.49132	11.97799	12.48756	13.02104	13.57948	14.16397	14.77566	15.41571	16.08535	16.78584	17.51851	18.28471	19.08585
10	10.46221	10.94972	11.46388	12.00611	12.57789	13.18079	13.81645	14.48656	15.19293	15.93742	16.72201	17.54874	18.41975	19.33730	20.30372	21.32147	22.39311	23.52131
11	11.56683	12.16872	12.80780	13.48635	14.20679	14.97164	15.78360	16.64549	17.56029	18.53117	19.56143	20.65458	21.81432	23.04452	24.34928	25.73290	27.19994	28.75514
12	12.68250	13.41209	14.19203	15.02581	15.91713	16.86994	17.88845	18.97713	20.14072	21.38428	22.71319	24.13313	25.65018	27.27075	29.00167	30.85017	32.82393	34.93107
13	13.80933	14.68033	15.61779	16.62684	17.71298	18.88214	20.14064	21.49530	22.95338	24.52271	26.21164	28.02911	29.98470	32.08865	34.35192	36.78620	39.40399	42.21866
14	14.94742	15.97394	17.08632	18.29191	19.59863	21.01507	22.55049	24.21492	26.01919	27.97498	30.09492	32.39260	34.88271	37.58107	40.50471	43.67199	47.10267	50.81802
15	16.09690	17.29342	18.59891	20.02359	21.57856	23.27597	25.12902	27.15211	29.36092	31.77248	34.40536	37.27971	40.41746	43.84241	47.58041	51.65951	56.11013	60.96527
16	17.25786	18.63929	20.15688	21.82453	23.65749	25.67253	27.88805	30.32428	33.00340	35.94973	39.18995	42.75328	46.67173	50.98035	55.71747	60.92503	66.64885	72.93901
17	18.43044	20.01207	21.76159	23.69751	25.84037	28.21288	30.84022	33.75023	36.97370	40.54470	44.50084	48.88367	53.73906	59.11760	65.07509	71.67303	78.97915	87.06804
18	19.61475	21.41231	23.41444	25.64541	28.13238	30.90565	33.99903	37.45024	41.30134	45.59917	50.39594	55.74971	61.72514	68.39407	75.83636	84.14072	93.40561	103.74028
19	20.81090	22.84056	25.11687	27.67123	30.53900	33.75999	37.37896	41.44626	46.01846	51.15909	56.93949	63.43968	70.74941	78.96923	88.21181	98.60323	110.28456	123.41353
20	22.01900	24.29737	26.87037	29.77808	33.06595	36.78559	40.99549	45.76196	51.16012	57.27500	64.20283	72.05244	80.94683	91.02493	102.44358	115.37975	130.03294	146.62797

- ◆ O Desconto Racional Simples são os juros simples da aplicação do valor atual durante os **n** períodos de aplicação.
- ◆ O Desconto Comercial Simples são os juros simples da aplicação do valor nominal durante os **n** períodos de aplicação.
- ◆ Considerando-se a mesma taxa de desconto, temos que em uma antecipação o desconto comercial simples é maior que o desconto racional simples ($D_C > D_R$).
- ◆ Considerando-se a mesma taxa de desconto, temos que em uma antecipação o valor descontado comercial simples é menor que o valor descontado racional simples ($V_C < V$).
- ◆ **Tabela I** – $(1 + i)^n$ = Fator de Capitalização.
- ◆ **Tabela II** – $a_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$ = Fator de Capitalização do Valor Atual.
- ◆ **Tabela III** – $S_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$ = Fator de Acumulação de Capital.

(Tabela I) x (Tabela II) = (Tabela III)

Matemática Financeira

J = Juros
C = Capital
i = Taxa de Juro
n = Prazo de Aplicação
M = Montante
V = Valor Atual ou Valor Presente
V_C = Valor Descontado Comercial (por fora)
N = Valor Nominal ou Valor Face
D_R = Desconto Racional (ou por dentro)
D_C = Desconto Comercial (ou por fora)
d = Taxa de Desconto Comercial (ou por fora)
T = Termo da Renda
(1 + i)ⁿ = Fator de Capitalização
a_{ni} = a, n cantoneira i
S_{ni} = S, n cantoneira i
NPV = Net Present Value
VPL = Valor Presente Líquido
VPL > 0 = Projeto viável
VPL = 0 = Indiferente
VPL < 0 = Projeto não viável
TIR = Taxa Interna de Retorno
r = Taxa Real
I = Taxa de Inflação
i_a = Taxa Aparente

FÓRMULAS**Em uma unidade de tempo:**

$$J = C \cdot i \quad (\text{Juro})$$

$$M = C + J \quad (\text{Montante})$$

Juros Simples:

$$J = C \cdot i \cdot n \quad (\text{Juros})$$

$$M = C [1 + in] \quad (\text{Montante})$$

$$M = C + J \quad (\text{Montante})$$

$$V = \frac{N}{1 + in} \quad (\text{Valor Atual})$$

$$i_k = \frac{i}{k} \quad (\text{Taxa Equivalente})$$

Descontos Comercial (ou por fora) Simples

$$D_C = N \cdot d \cdot n \quad (\text{Desconto Comercial})$$

$$V_C = N - D_C \quad (\text{Valor Descontado Comercial})$$

$$V_C = N[1 - dn] \quad (\text{Valor Descontado Comercial})$$

Relação entre a Taxa i e d :

(Taxa efetiva de Juros Simples)

$$i = \frac{d}{1 - dn}$$

(Taxa Desconto Comercial)

$$d = \frac{i}{1 + in}$$

Desconto Racional (ou por dentro) Composto

(Desconto Racional)

$$D_R = N - V$$

(Valor Descontado Racional)

$$V = \frac{N}{(1 + i)^n}$$

Desconto Comercial (ou por fora) Composto

(Desconto Comercial)

$$D_C = N - V_C$$

(Valor Descontado Comercial)

$$V_C = N (1 - d)^n$$

(Valor Descontado Comercial)

$$V_C = N [1 - (1 - d)^n]$$

Valor Atual de uma Renda

$$V = \frac{T_1}{(1+i)^{t_1}} + \frac{T_2}{(1+i)^{t_2}} + \frac{T_3}{(1+i)^{t_3}} + \dots$$

Montante de uma Renda

$$M = T \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad M = T \cdot S_{\overline{n}|i}$$

Valor Atual de uma Renda Periódica, Temporária e Uniforme

Postecipada

$$V = T \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

$$V = T \cdot a_{\overline{n}|i} \quad a_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

Valor Atual das Rendas Perpétuas

Postecipada

$$V = \frac{T}{i}$$

Antecipada

$$V = T + \frac{T}{i}$$

$$V = \frac{(1+i)T}{i}$$

Valor Atual de uma Renda Periódica, Temporária e Uniforme

Antecipada

$$V = T + T \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^{n-1}} \quad V = T + T \cdot a_{\overline{n-1}|i}$$

Diferida de m Períodos

$$V = \frac{T}{i(1+i)^m}$$

Taxa Aparente e Taxa Real

$$1 + i_a = (1 + I)(1 + r) \quad r = \frac{1 + i_a}{1 + I} - 1$$

(Taxa Real)

Diferida de m Períodos

$$V = \frac{T \cdot a_{\overline{n}|i}}{(1+i)^m} \quad V = T \cdot [a_{\overline{m+n}|i} - a_{\overline{m}|i}]$$

MISCELÂNEA Taxa Interna de Retorno (TIR)

$$\frac{N_1}{(1+TIR)^1} + \frac{N_2}{(1+TIR)^2} + \frac{N_3}{(1+TIR)^3} + \dots + \frac{N_n}{(1+TIR)^n} - v = 0$$